PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

56. BAND, 3. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM OKTOBER 1952)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1952

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

56. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Jaeger, A. Gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik 181

Hadwiger, H. Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Maßzahlen bei konvexen Rotationskörpern 220

Prachar, K. Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy und Ramanujan auf algebraische Zahlkörper 229

Lochs, G. Über die Anzahl der Gitterpunkte in einem Tetraeder 233

Aigner, A. Weitere Ergebnisse über $x^3+y^3=z^3$ in quadratischen Körpern . . . 240

Schmetterer, L. Notiz zu einem Satz über Diophantische Approximationen . . . 253

Buchbesprechungen 256

Gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik.

Von

Arno Jaeger, Ibadan (Nigeria).

(Eingelangt am 19. Oktober 1951.)

Inhaltsverzeichnis:

Seite

1. Einleitung 181
2. Binomialrelationen und Paskalsches Dreieck modulo p 184
3. Basissätze 189
4. Zulässige Bereiche 192
5. Lösungen und Lösbarkeit 197
6. Integration und Integrierbarkeit 201
7. Lineare Differentialgleichungen 205
8. Zwei Beispiele linearer Differentialgleichungen 209
9. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 213

1. Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen über gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik sind rein algebraischer Natur und liefern keinen unmittelbaren Beitrag zur Analysis. Denn die Begriffe „Differentiation" und „Differentialgleichung" werden hier in einem andern Sinne als in der Analysis verwendet, da in Körpern von Primzahlcharakteristik bei Benutzung der klassischen Definition der Differentiation niemals beliebig hohe nichtverschwindende Ableitungen auftreten. Deshalb werden sich auch oft die Ergebnisse von den entsprechenden in der Analysis als wesentlich verschieden erweisen.

Eine *Differentiation D in einem Körper K* im Sinne dieser Arbeit ist die Zuordnung einer Folge von Elementen $D^0 z = z$, $D^1 z$, $D^2 z$, ... aus K zu jedem $z \in K$ mit den drei Eigenschaften:

$$D^n (y + z) = D^n y + D^n z, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \textit{Summenregel}; \tag{1.1}$$

$$D^n (y z) = \sum_{\alpha+\beta=n} D^\alpha y \, D^\beta z, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \textit{Produktregel}; \tag{1.2}$$

$$D^m D^n y = \binom{m+n}{m} D^{m+n} y, \qquad m,n = 0,1,2,\ldots; \textit{ Iterationsregel.} \tag{1.3}$$

Wenn mit zwei Hilfsunbestimmten u, v die formalen Potenzreihen

$$y_D\{u\} = y + \sum_{n=1}^{\infty} u^n D^n y \tag{1.4}$$

$$y_{(D,D)}\{u,v\} = y + \sum_{(m,n)>(0,0)} u^m v^n D^m D^n y$$

eingeführt werden, so sind die Eigenschaften (1.1), (1.2), (1.3) mit

$$(y+z)_D\{u\} = y_D\{u\} + z_D\{u\} \tag{1.5}$$

$$(y\,z)_D\{u\} = y_D\{u\} \cdot z_D\{u\} \tag{1.6}$$

$$y_{(D,D)}\{u,v\} = y_D\{u+v\} \tag{1.7}$$

gleichwertig.

Diese Definition geht auf *Hasse, F. K. Schmidt* und *Deuring*[1] zurück und ist für Körper von beliebiger Charakteristik sinnvoll; im Falle der Charakteristik Null ergibt sie aber nichts wesentlich Neues. Daher beschränken wir uns auf Körper von Primzahlcharakteristik p, und bei allen in dieser Arbeit auftretenden Körpern werde dieses stillschweigend vorausgesetzt.

Ist K ein Körper mit einer nichttrivialen Differentiation D, so folgt dann[1] die Existenz von Körperelementen z mit

$$D^n z = 0 \text{ für } 0 < n < p^t, \text{ aber } D^{p^t} z \neq 0 \tag{1.8}$$

für gewisse $t\,(>0)$, diese sind also nur bedingt konstant und werden als *Konstante der Ordnung* t bezeichnet. Man kann sich weiterhin mit der Untersuchung solcher Differentiationen begnügen, für die es in K inkonstante Elemente gibt; für diese D existieren Elemente x_t in K derart, daß

$$D\,x_t = 1,\ D^n x_t = 0 \text{ für } 1 < n < p^t \tag{1.9}$$

gilt[1]. Der Buchstabe x ist in der gesamten Arbeit für Elemente dieser Eigenschaft reserviert.

Vor Beginn der eigentlichen Untersuchung von *Differentialgleichungen* in diesem Sinne sind eine Reihe von Vorbereitungen notwendig. Zunächst empfiehlt sich wegen (1.3) ein Überblick über Binomialrelationen und das Paskalsche Dreieck modulo p. Sodann wird

[1] Vergleiche [1], [2], [3], [4], besonders § 2 in [4]. Die in [4] eingeführten Begriffe und Symbole werden in vorliegender Arbeit häufig verwandt. Im Sinne von [4] ist eine Differentiation als eine Multidifferentiation 1-ter Dimension aufzufassen, wenn man die dort für Multidifferentiationen ausgesprochenen Sätze auf einfache Differentiationen übertragen will.

gezeigt, daß jedes Element eines Körpers K mit einer Differentiation D eine eindeutige Basisdarstellung als Polynom in x_t vom Formalgrade $p^t - 1$ mit konstanten Koeffizienten von Ordnungen $\geqq t$ besitzt. Schließlich wird noch genau festgestellt, auf welche Körpererweiterungen von K sich D fortsetzen läßt.

Die Definition einer Differentialgleichung erfolgt nun in der üblichen Weise, als *Lösung* erklärt man jedes die Differentialgleichung identisch erfüllende Element y aus einem solchen Erweiterungskörper von K, auf den sich die gegebene Differentiation fortsetzen läßt. Der Exponent der höchsten in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitung heiße ihre *Formalordnung* n, und es sei $p^{t-1} \leqq n < p^t$. Schreibt man alle in der Differentialgleichung vorkommenden Elemente z einschließlich des unbestimmten y als Polynome in x_t vom Formalgrade $p^t - 1$ mit konstanten Koeffizienten von Ordnungen $\geqq t$

$$z = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} z_\nu x_t^\nu, \quad y = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} y_\nu x_t^\nu,$$

was nach den Basissätzen eindeutig möglich ist, so wird die Differentialgleichung gleichbedeutend mit einem identisch verschwindenden Polynom in x_t vom Formalgrade $p^t - 1$ mit konstanten Koeffizienten von Ordnungen $\geqq t$. Damit ist die Bestimmung der Lösungen der Differentialgleichung auf das Aufsuchen aller Lösungen von p^t algebraischen Gleichungen mit p^t Unbekannten $y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}$ in solchen Erweiterungskörpern von K zurückgeführt, auf die sich D fortsetzen läßt.

Als einfachste Typen werden zuerst die Differentialgleichungen $D^n y = w$ behandelt, notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingungen aufgestellt und im Falle der Existenz die allgemeine Lösung expliziert angegeben. Danach werden die linearen Differentialgleichungen untersucht; im Gegensatz zur klassischen Theorie kann hier die Anzahl a der unabhängigen Parameter in der allgemeinen Lösung (falls sie existiert) größer als die Formalordnung der Differentialgleichung sein, es läßt sich aber eine obere Grenze für a finden. Die eingeführten Methoden werden dann auf zwei bekannte Differentialgleichungen angewandt: Bei der Hypergeometrischen Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung ein oder zwei unabhängige Parameter, die *Besselsche* Differentialgleichung dagegen besitzt nur die verschwindende Lösung. Abschließend werden mit Operatormethoden, die von denen der klassischen Theorie wesentlich verschieden sind, die Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bestimmt.

2. Binomialrelationen und Paskalsches Dreieck modulo p.

Wie schon in der Theorie der Differentiationen und Multidifferentiationen in Körpern von Primzahlcharakteristik[1], so spielen auch bei der Behandlung der Differentialgleichungen im Sinne jener Theorie einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten eine bedeutende Rolle, die zunächst in Kürze zusammengefaßt werden sollen. Hierbei soll zur Vereinfachung der Schreibweise das Symbol $\binom{0}{0}$ grundsätzlich die Zahl 1 bedeuten und bei allen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ stets stillschweigend $n \geqq 0$, $k \geqq 0$ angenommen werden.

Da die $\binom{n}{k}$ für $n \geqq 0$, $k \geqq 0$ ganze nichtnegative Zahlen sind, bleiben diejenigen Binomialrelationen, die nur Ringoperationen enthalten, auch mod p gültig, wie z. B.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \equiv 0 \pmod{p} \text{ für } n > 0, \tag{2.1}$$

$$\binom{\gamma-\beta}{\lambda-\beta}\binom{\nu+\gamma-\beta}{\nu}\binom{\nu+\gamma}{\beta} \equiv \binom{\lambda}{\beta}\binom{\gamma}{\lambda}\binom{\nu+\gamma}{\nu} \pmod{p}, \tag{2.2}$$

$$\binom{\alpha+\beta}{\gamma}\binom{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha} \equiv \binom{\alpha+\beta}{\alpha}\binom{\beta}{\gamma} \pmod{p}, \tag{2.3}$$

deren Beweise wir uns hier sparen wollen.

Hilfssatz 1: Es seien

$$n = \sum_{\nu=0}^{s} n_\nu p^\nu \quad 0 \leqq n_\nu < p$$

und

$$k = \sum_{\nu=0}^{s} k_\nu p^\nu \quad 0 \leqq k_\nu < p$$

die p-adischen Entwicklungen zweier nichtnegativer ganzer Zahlen. Dann gilt

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{\nu=0}^{s} \binom{n_\nu}{k_\nu} \pmod{p}.$$

Beweis[2]: Mit einer Hilfsunbestimmten t gilt

$$(1+t)^n = \prod_{\nu=0}^{s} (1+t)^{n_\nu p^\nu} \equiv \prod_{\nu=0}^{s} (1+t^{p^\nu})^{n_\nu} \equiv \prod_{\nu=0}^{s} \sum_{k_\nu=0}^{p-1} \binom{n_\nu}{k_\nu} t^{k_\nu p^\nu} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{p^{s+1}-1} \prod_{\nu=1}^{s} \binom{n_\nu}{k_\nu} t^k \pmod{p},$$

andererseits ist aber $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$.

---

[2] Vergleiche [3].

Hilfssatz 2:

Es seien k, m, s positive ganze Zahlen und $n = k + m$. Dann folgt aus $k < p^s$, $m < p^s$, $n \geqq p^s$ die Beziehung

$$\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Beweis: Sind $n = \sum_{\nu=0}^{s} n_\nu p^\nu \; (0 \leqq n_\nu < p)$ und $k = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu p^\nu \; (0 \leqq k_\nu < p)$ die p-adischen Entwicklungen von n und k, so muß wegen der Voraussetzung $n_s \neq 0$ sein. Wäre nun stets $n_\nu \geqq k_\nu$ für $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$, so wäre

$$m = n - k = \sum_{\nu=0}^{s-1} (n_\nu - k_\nu) p^\nu + n_s p^s$$

die p-adische Entwicklung von m. Da das der Bedingung $m < p^s$ widerspricht, muß also für mindestens ein ν $n_\nu < k_\nu$ sein. Für dieses ν gilt dann aber $\binom{n_\nu}{k_\nu} = 0$, und daraus folgt mit Hilfssatz 1 die Behauptung.

Bei numerischen Berechnungen der Lösungen von Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik empfiehlt sich manchmal als Hilfsmittel die Aufstellung des Paskalschen Dreiecks modulo p. Es kann zwar leicht in üblicher Weise bestimmt werden, seine Struktur tritt aber aus dem Folgenden deutlicher hervor.

Definition 1: Das Schema

$$\mathfrak{P} = \begin{array}{ccccccccc}
 & & & a_{11} & & & & & \\
 & & a_{21} & & a_{22} & & & & \\
 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & \\
a_{n1} & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & a_{nn},
\end{array}$$

das sich von einer gewöhnlichen Dreiecksmatrix dadurch unterscheidet, daß die Elemente nicht in waagrechten und senkrechten Reihen, sondern in diagonalen Reihen geordnet sind, heiße eine *Paskal*matrix $\mathfrak{P}$ der Ordnung n. Die Elemente $a_{\nu 1}$, $a_{\nu\nu}$, $a_{n\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n$ heißen Randelemente, die Elemente a_{11} oberes und a_{n1}, a_{nn} untere Eckelemente.

Definition 2: Das Schema

$$\mathfrak{A} = \begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} \quad a_{n-1,n} \\ & & & \quad a_{nn} \end{matrix},$$

also eine „auf den Kopf gestellte" Paskalmatrix, heiße *Antipaskalmatrix.*

Definition 3: Sind $\mathfrak{P}$ eine Paskalmatrix und n ein Skalar, so bedeute $n\,\mathfrak{P}$ diejenige Paskalmatrix, die aus $\mathfrak{P}$ durch Multiplikation jedes Elementes mit n entsteht.

Die Multiplikation mit Zahlfaktoren wird also entsprechend wie bei gewöhnlichen Matrizen definiert.

Eine Paskalmatrix $\mathfrak{Q}$ der Ordnung mn kann in $\frac{m(m+1)}{2}$ Paskalmatrizen P_{ik} der Ordnung n und $\frac{m(m-1)}{2}$ Antipaskalmatrizen A_{ik} der Ordnung $n-1$ aufgespalten werden, wenn nach jeder kn-ten Reihe ($k = 1, 2, \ldots, m$) sowohl in der waagerechten als auch in den beiden diagonalen Richtungen ein Trennungsstrich zur Aufspaltung gezogen wird:

$$\mathfrak{Q} = \begin{matrix} & & & P_{11} & & & \\ & & P_{21} & A_{11} & P_{22} & & \\ & P_{31} & A_{21} & P_{32} & A_{22} & P_{33} & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{matrix} \qquad (2.4)$$

Die Antipaskalmatrizen besitzen nur die Ordnung $n-1$, denn eine Paskalmatrix in (2.4) bildet zusammen mit der darunterliegenden Antipaskalmatrix ein gekipptes rhombisches Schema, das bezüglich seiner Anordnung — wenn man von der gekippten und verzerrten Lage absieht — eine „quadratische Matrix" darstellt, dessen „Hauptdiagonale" noch von den Elementen der Paskalmatrix gebildet wird. Da

jede Paskalmatrix, außer den m der untersten Zeile, unter sich eine Antipaskalmatrix hat, ist die Anzahl der Antipaskalmatrizen in (2.4)

$$\frac{m\,(m+1)}{2} - m = \frac{m\,(m-1)}{2}.$$

Die Menge der Paskalmatrizen P_{ik} in (2.4) läßt sich in der Reihenfolge dieser Aufspaltung ihrerseits als Paskalmatrix der Ordnung m schreiben:

$$\mathfrak{P} = \begin{array}{ccccccccc} & & & & P_{11} & & & & \\ & & & P_{21} & & P_{22} & & & \\ & & P_{31} & & P_{32} & & P_{33} & & \\ & P_{41} & & P_{42} & & P_{43} & & P_{44} & \\ . & & . & & & & . & & . \\ & . & & . & & & & . & \\ . & & . & & & & & . & . \end{array} \tag{2.5}$$

Ebenso läßt sich die Menge der erhaltenen Antipaskalmatrizen A_{ik} als Paskalmatrix der Ordnung $m-1$ schreiben:

$$\mathfrak{A} = \begin{array}{ccccccccc} & & & & A_{11} & & & & \\ & & & A_{21} & & A_{22} & & & \\ & & A_{31} & & A_{32} & & A_{33} & & \\ & A_{41} & & A_{42} & & A_{43} & & A_{44} & \\ . & & . & & & & . & & . \\ & . & & . & & & & . & \\ . & & . & & & & & . & . \end{array} \tag{2.6}$$

Umgekehrt, sind zwei Paskalmatrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ der Ordnungen m und $m-1$ gegeben, deren Elemente Paskalmatrizen P_{ik} der Ordnung n und Antipaskalmatrizen A_{ik} der Ordnung $n-1$ beziehungsweise sind, so kann man aus diesen Größen (2.5) und (2.6) gemäß (2.4) eine Paskalmatrix $\mathfrak{q}$ der Ordnung mn konstruieren. Für unsere Anwendungen ist der Fall besonders wichtig, daß in allen auftretenden Antipaskalmatrizen in (2.6) alle Elemente Null sind.

Definition 4: Eine Paskalmatrix (2.4) heiße *durch Rändern aus der Paskalmatrix* (2.5) *entstanden*, wenn alle Antipaskalmatrizen in (2.6) nur Nullen als Elemente enthalten. Das Rändern werde durch einen oberen Index o gekennzeichnet, d. h. $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}^o$.

Definition 5: Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Paskalmatrizen der Ordnungen α und β mit Elementen a_{ik}, b_{ik}. Die Paskalmatrix $\mathfrak{L}$ der Ordnung α, deren Elemente $c_{ik} = a_{ik}\,\mathfrak{B}$ Paskalmatrizen der Ordnung β sind, heiße *das verschränkte Produkt von* $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ und werde mit

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \diamond \mathfrak{B} = \begin{matrix} a_{11}\,\mathfrak{B} & & & & \\ a_{21}\,\mathfrak{B} & a_{22}\,\mathfrak{B} & & & \\ a_{31}\,\mathfrak{B} & a_{32}\,\mathfrak{B} & a_{33}\,\mathfrak{B} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha 1}\,\mathfrak{B} & a_{\alpha 2}\,\mathfrak{B} & \cdot & \cdot \quad \cdot & a_{\alpha\,\alpha-1}\mathfrak{B} \quad a_{\alpha\alpha}\mathfrak{B} \end{matrix}$$

bezeichnet.

Satz 1: *Das Paskalsche Dreieck* $P^{(p^{t+1})}$ *der Ordnung* p^{t+1} *entsteht durch Rändern aus dem verschränkten Produkt des Paskalschen Dreiecks* $P^{(p)}$ *der Ordnung* p *mit dem* $P^{(p^t)}$ *der Ordnung* p^t:

$$P^{(p^{t+1})} = (P^{(p)} \diamond P^{(p^t)})^0.$$

Im Grunde genommen ist dieser Satz natürlich nur eine Folge des Hilfssatzes 1, und er läßt sich auch damit beweisen. Wegen der Assoziativität dieses verschränkten Produktes gilt übrigens auch

$$P^{(p^{t+1})} = (P^{(p^t)} \diamond P^{(p)})^0,$$

aber zur Konstruktion von $P^{(p^{t+1})}$ genügt der angegebene Satz, und sein Beweis läßt klar die Struktur von $P^{(p^{t+1})}$ zutage treten.

Beweis: Die ersten p^t Zeilen von $P^{(p^{t+1})}$ sind natürlich mit $P^{(p^t)}$ identisch, d. h. die oberste Paskalmatrix $\binom{0}{0} P^{(p^t)}$ in $(P^{(p)} \diamond P^{(p^t)})^0$ hat die gewünschte Form. Es sei nun bereits gezeigt, daß $P^{(k\,p^t)} = (P^{(k)} \diamond P^{(p^t)})^0$ für $k < p$ ist, oder ausführlich:

$$P^{(k p^t)} = \begin{matrix} \binom{0}{0} P & & \\ \binom{0}{1} P & \binom{1}{1} P\ , & P = P^{(p^t)},\quad k < p \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \binom{k-1}{0} P & \binom{k-1}{k-1} P & \end{matrix}$$

Als Binomialkoeffizienten von $(a+b)^{(kp^t)} = (a^{p^t}+b^{p^t})^k$ bestehen die unteren Randelemente von $P^{(kp^t-1)}$ aus $\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots, \binom{k}{k}$ mit jeweils p^t-1 Nullen zwischen je zwei dieser Größen. Diese Nullen liegen unterhalb aller Elemente von $\binom{k-1}{\nu} P$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k-1)$, daher schließt sich wegen

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{2.7}$$

an jedes $\binom{k-1}{\nu} P$ nach unten eine Antipaskalnullmatrix der Ordnung p^t-1 an.

Alle jene Binomialkoeffizienten $\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots, \binom{k}{k}$ sind $\neq 0$, wären sie sämtlich gleich 1, so würden sich wegen (2.7) zunächst Paskalsche Dreiecke, deren obere Eckpunkte jene Ziffern 1 sind, nach unten bis zur $kp^t + p^t$-ten, d. h. $(k+1)\,p^t$-ten Zeile anschließen, denn erst in dieser Zeile haben sich die einzelnen neu entstandenen Dreiecke soweit genähert, daß keine Nullelemente mehr zwischen ihren Elementen stehen, die die Unahängigkeit dieses Aufbaues gewährleisten. Da aber die oberen Eckelemente dieser aufzubauenden Dreiecke nicht 1, sondern $\binom{k}{\nu}$ sind, so schließen sich, von den $\binom{k}{\nu}$ als oberen Eckgliedern in der $kp^t + 1$-ten Zeile anfangend, die Paskalmatrizen $\binom{k}{\nu} P$ nach unten an und füllen den Platz zwischen den Antipaskalnullmatrizen aus. Damit ist gezeigt, daß dann auch

$$P^{((k+1)\,p^t)} = (P^{(k+1)} \dot{+} P^{(p^t)})^0$$

gilt, und der Induktionsschluß durchgeführt. Für $k = p-1$ folgt die Behauptung des Satzes.

Für das Lösen von Differentialgleichungen erweisen sich meist jedoch nicht so sehr die Werte der Binomialkoeffizienten als wichtig, sondern viel mehr ist man daran interessiert, wie Mengen von verschwindenden Binomialkoeffizienten aussehen können. Die obige Konstruktion des Paskalschen Dreiecks bietet ein graphisches Hilfsmittel; man sieht, daß alle Nullen in Antipaskalmatrizen angeordnet sind.

3. Basissätze.

In der algebraischen Differentiationstheorie in Körpern K von Primzahlcharakteristik $p \neq 0$ wird Folgendes gezeigt[1]:

1. Man kann sich bei der Untersuchung von Differentiationen auf *reguläre* Differentiationen D (d. h. solche, zu denen es überhaupt Elemente $z \in K$ mit $Dz \neq 0$ gibt) beschränken. Ist D nicht regulär, so

kann man durch *Reduktion* zu einer regulären Differentiation übergehen[1].

2. Für jede reguläre Differentiation D in einem Körper K und für jedes positive ganze t besitzt das Differentialgleichungssystem

$$Dx = 1, \; D^n x = 0, \qquad 1 < n < p^t, \tag{3.1}$$

Lösungen. Ist x eine Lösung von (3.1) und D_x *die zu* x *gehörige Elementdifferentiation in der durch* D *definierten Klasse* $\mathfrak{K}_D$, so gilt für jedes Element $z \in K$:

$$D^n z = D_x^n z, \qquad 1 \leqq n < p^t,$$

d. h. bis zur $p^t - 1$-ten Ableitung stimmt D mit der Elementdifferentiation D_x überein[3]. In der gesamten vorliegenden Arbeit bedeute bei gegebener regulärer Differentiation D der Buchstabe x eine feste Lösung von (3.1), wobei t so gewählt wird, daß für die höchste in einem gegebenen Zusammenhang vorkommende Ableitung n von D noch $n < p^t$ gilt.

3. Ist weiterhin $z \in K$ *regulär* D*-inkonstant* (d. h. $Dz \neq 0$), so folgt die eindeutige Basisdarstellung

$$K = K_D + K_D z + \ldots + K_D z^{p-1},$$

wobei K_D der Körper der D-Konstanten mindestens erster Ordnung ist[3], oder, da x sicher D-inkonstant ist, speziell:

$$K = K_D + K_D x + \ldots + K_D x^{p-1}.$$

Die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes wird eine wesentliche Rolle bei der Lösung von Differentialgleichungen spielen:

Satz 2: *Es sei* x *eine Lösung von* (3.1) *bei gegebenem* t. *Dann gibt es für jedes* $z \in K$ *eine eindeutige Darstellung*

$$z = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} z_\nu x^\nu, \tag{3.2}$$

sie heiße die t*-te Basisdarstellung von* z, *und es gilt*

$$z_\nu = \sum_{\mu=0}^{p^t-1-\nu} (-1)^\mu x^\mu \binom{\nu+\mu}{\nu} D^{\nu+\mu} z, \qquad \nu = 0, 1, \ldots p^t - 1. \tag{3.3}$$

Alle z_ν *gehören dem Körper* K_D t *der konstanten Elemente der Ordnung* $\geqq t$ *an.*

Beweis: Einsetzen von (3.3) in (3.2) liefert:

$$z = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} \sum_{\mu=0}^{p^t-1-\nu} (-1)^\mu x^\mu \binom{\nu+\mu}{\nu} (D^{\nu+\mu} z) \cdot x^\nu = \sum_{\lambda=0}^{p^t-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu \binom{\lambda}{\mu} (D^\lambda z) x^\lambda.$$

[3] Vergleiche [3] oder in [4] die Paragraphen 4—6.

Wegen (2.1) ist dies in der Tat eine Identität. Also läßt sich z in der Form (3.2) mit (3.3) darstellen.

Sodann ist zu zeigen, daß alle z_ν in (3.3) D-konstant der Ordnung $\geqq t$ sind. Zunächst gilt für die D-Taylorreihe von x^m gemäß (1.6):

$$x_D^m\{u\} = (x_D\{u\}^m),$$

und da x der Kongruenz

$$x_D\{u\} \equiv x + u \qquad (\mathrm{mod}\ u^p)$$

genügt, folgt

$$x_D^m\{u\} \equiv (x+u)^m \ (\mathrm{mod}\ u^p) \text{ für } m < p^t,$$

d. h.

$$D^n x^m = \binom{m}{n} x^{m-n} \text{ für } m, n < p^t.$$

Damit ergibt sich nebenbei die Formel

$$D^n \sum_{\nu=0}^{p^t-1} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} \binom{\nu}{n} a_\nu x^{\nu-n}, \qquad n < p^t, \tag{3.4}$$

von der wir in der ganzen Arbeit häufigen Gebrauch machen werden. Nun ist unter Verwendung von (1.3):

$$D^\lambda z_\nu = \sum_{\alpha+\beta=\lambda} \sum_{\mu=0}^{p^t-1-\nu} (-1)^\mu (D^\alpha x^\mu) \binom{\nu+\mu}{\nu} D^\beta D^{\nu+\mu} z, \qquad \begin{matrix} 0 < \lambda < p^t, \\ 0 \leqq \nu < p^t. \end{matrix}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\lambda} \sum_{\mu=0}^{p^t-1-\nu} (-1)^\mu \binom{\mu}{\lambda-\beta} x^{\mu-\lambda+\beta} \binom{\nu+\mu}{\nu} \binom{\beta+\nu+\mu}{\beta} D^{\beta+\nu+\mu} z.$$

Durch die Substitution $\gamma = \mu + \beta$ und Änderung der Summationsfolge wird daraus

$$D^\lambda z_\nu = \sum_{\gamma=\lambda}^{p^t-1-\nu+\lambda} (-1)^\gamma \sum_{\substack{\beta=\gamma+\nu-(p^t-1) \\ \beta \geqq 0}}^{\lambda} (-1)^\beta \binom{\gamma-\beta}{\lambda-\beta} \binom{\nu+\gamma-\beta}{\nu} \binom{\gamma+\nu}{\beta} x^{\gamma-\lambda} D^{\gamma+\nu} z.$$

Unter Verwendung von (2.2) folgt

$$D^\lambda z_\nu = \sum_{\gamma=\lambda}^{p^t-1-\nu+\lambda} (-1)^\gamma \left[\sum_{\substack{\beta=\gamma+\nu-(p^t-1) \\ \beta \geqq 0}}^{\lambda} (-1)^\beta \binom{\lambda}{\beta} \right] \binom{\gamma}{\lambda} \binom{\gamma+\nu}{\nu} x^{\gamma-\lambda} D^{\gamma+\nu} z. \tag{3.5}$$

Für $\gamma < p^t - \nu$ verschwindet der Ausdruck in der großen Klammer wegen (2.1); für $\gamma \geqq p^t - \nu$ muß man die zwei Fälle $\gamma \geqq p^t$ und $\gamma < p^t$ gesondert betrachten. Aus $\gamma \geqq p^t$ folgt $\binom{\gamma}{\lambda} = 0$ wegen $\lambda < p^t$ und $\gamma - \lambda < p^t$ nach Hilfssatz 2. Aus $\gamma < p^t$ zusammen mit $\gamma + \nu \geqq p^t$ und $\nu < p^t$ folgt schließlich $\binom{\gamma+\nu}{\nu} = 0$ ebenfalls nach Hilfssatz 2. Einer der

drei Zahlfaktoren verschwindet also in jedem Summanden von (3.5), d. h. es gilt wirklich

$$D^\lambda z_\nu = 0 \text{ für } 0 \leqq \nu < p^t,\ 0 < \lambda < p^t.$$

Wäre schließlich die Darstellung (3.3) nicht eindeutig, so ließe sich die Null nichttrivial in der Form (3.3) darstellen. Dann wäre

$$0 = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} z_\nu x^\nu.$$

Sei $\nu = n$ der höchste Index, für den $z_\nu \neq 0$, d. h. $0 = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu x^\nu$, $z_n \neq 0$. Dann folgte durch Bildung der n-ten Ableitung auf beiden Seiten dieser Gleichung $0 = z_n$, also ein Widerspruch.

4. Zulässige Bereiche.

Obwohl die Ergebnisse dieses Paragraphen in vorliegender Arbeit nur für den Fall einfacher Differentiationen angewandt werden, werden die Untersuchungen gleich für *Multidifferentiationen*[4] ausgeführt, da dieses ohne besonderen Aufwand möglich ist. Durch Streichen der Vorsilben „Multi" und „Minimal" und durch Ersetzung aller Frakturbuchstaben durch lateinische Buchstaben sind alle folgenden Sätze und Beweise automatisch auf Differentiationen übertragbar, ohne daß zum Verständnis die Kenntnis des Begriffs „Multidifferentiation" nötig ist. Alle vorkommenden Körper und Ringe sollen die Charakteristik $p \neq 0$ besitzen.

Definition 6: Es sei $\mathfrak{D}$ eine Multidifferentiation in einem Ringe R. Ein Erweiterungs- oder Teilring S von R heiße $\mathfrak{D}$-*zulässig*, wenn es eine Multidifferentiation $\overline{\mathfrak{D}}$ in S gibt, die in $S \cap R$ mit $\mathfrak{D}$ übereinstimmt.

Satz 3: *Es seien $\mathfrak{D}$ eine Multidifferentiation in einem Ringe R und I ein Ideal in R. $\mathfrak{D}$ erzeugt in R/I eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}^*$ vermöge*

$$(x \bmod I)_{\mathfrak{D}^*}\{\mathfrak{u}\} = \sum_{\mathfrak{u}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{u}} (\mathfrak{D}^{\mathfrak{u}} x \bmod I)$$

dann und nur dann, wenn I $\mathfrak{D}$-zulässig ist.

Beweis: 1. $x_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} \equiv y_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} \pmod I$ sei eine Abkürzung für

$$\sum_{\mathfrak{u}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{u}} (\mathfrak{D}^{\mathfrak{u}} x \bmod I) = \sum_{\mathfrak{u}=0}^{\infty} \mathfrak{u}^{\mathfrak{u}} (\mathfrak{D}^{\mathfrak{u}} y \bmod I).$$

Wenn $\mathfrak{D}$ ein Multidifferentiation in I ist, so gilt für alle Bildelemente $i_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ und $i_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}$ von $i \in I$:

[4] Vergleiche [4], § 2.

$$i_{\mathfrak{D}}\{u\} \equiv 0 \pmod{I} \tag{4.1}$$

$$i_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\} \equiv 0 \pmod{I}. \tag{4.2}$$

Da wegen der Isomorphieeigenschaft der Abbildungen $x \to x_{\mathfrak{D}}\{x\}$ und $x \to x_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\}$ die Ringe $I_u\, I_{(u,v)}$ aller Elemente $i_{\mathfrak{D}}\{u\}$, $i_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\}$ bzw. Ideale in R_u, $R_{(u,v)}$ bzw. sind, folgt

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{D}}\{u\} + y_{\mathfrak{D}}\{u\} &\equiv (x+y)_{\mathfrak{D}}\{u\} \pmod{I_u}, \\ x_{\mathfrak{D}}\{u\} \cdot y_{\mathfrak{D}}\{u\} &\equiv (x\,y)_{\mathfrak{D}}\{u\} \pmod{I_u}, \\ x_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\} &\equiv x_{\mathfrak{D}}\{u+v\} \pmod{I_{(u,v)}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.1) und (4.2) ergeben sich daraus die Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{D}}\{u\} + y_{\mathfrak{D}}\{u\} &\equiv (x+y)_{\mathfrak{D}}\{u\} \pmod{I}, \\ x_{\mathfrak{D}}\{u\} \cdot y_{\mathfrak{D}}\{u\} &\equiv (x\,y)_{\mathfrak{D}}\{u\} \pmod{I}, \\ x_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\} &\equiv x_{\mathfrak{D}}\{u+v\} \pmod{I}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{D}^*$ eine Multidifferentiation in R/I.

2. Umgekehrt, wenn (4.1) nicht gilt, so existiert ein $i \in I$ mit

$$i_{\mathfrak{D}}\{u\} \not\equiv 0 \pmod{I}. \tag{4.3}$$

Die Abbildung $x \bmod I \to x_{\mathfrak{D}}\{u\} \bmod I$ ist aber dann kein Isomorphismus mehr, denn aus (4.3) folgt $0_{\mathfrak{D}}\{u\} \neq 0$.

Daß alle separablen algebraischen Erweiterungen eines Körpers K, in dem eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ gegeben ist, $\mathfrak{D}$-zulässig sind, ist bekannt. Es gibt aber auch inseparable Erweiterungen L von K, die sich als $\mathfrak{D}$-zulässig erweisen, wie zunächst folgender Satz zeigt:

Satz 4: Es seien K ein Körper mit einer Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ und $L = K(\alpha)$ eine solche einfache inseparable Erweiterung von K, daß die Koeffizienten der über K irreduziblen normierten Gleichung für α $\mathfrak{D}$-vollkonstant sind. Dann ist L $\mathfrak{D}$-zulässig. Die Fortsetzung $\mathfrak{D}^*$ von $\mathfrak{D}$ auf L ist eindeutig, es ist die triviale Fortsetzung.

Beweis: Es sei $g(t)$ das normierte irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus K, das die Nullstelle α hat. Ist $\overline{\mathfrak{D}}$ die triviale Fortsetzung von $\mathfrak{D}$ auf den Polynomring $K[t]$ in einer Unbestimmten t über K, so wird $\overline{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{l}}\, g(t) = 0$ für $\mathfrak{l} > 0$, und für jedes Element $g(t)\, h(t)$ des Hauptideals $I = (g(t))$ gilt

$$\overline{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{l}}(g(t)\, h(t)) = g(t)\, \overline{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{l}}\, h(t) \in I \text{ für } \mathfrak{l} > 0.$$

Also definiert $\mathfrak{D}$ nach Satz 3 in $L^* = K[t]/(g(t))$ eine Multidifferentiation $\mathfrak{D}^*$.

Da $L^* \simeq K(\alpha)$, so enthält L^* als Teilkörper einen zu K isomorphen Körper K^*. Identifiziert man K^* mit K, so sind in diesem Körper offenbar die Multidifferentiationen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ identisch. Identifiziert man L^* mit $L = K(\alpha)$, so ist $\mathfrak{D}^*$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}$ auf L, d. h. L wird $\mathfrak{D}$-zulässig. Daß nur die triviale Fortsetzung auf L möglich ist, ist klar.

Wegen Satz 4 läßt sich K zu einem solchen Körper $\bar{K}$ erweitern, daß $\bar{K}_{\mathfrak{D}\infty}$ vollkommen wird. Also kann man den Körper $K_{\mathfrak{D}\infty}$ der $\mathfrak{D}$-Vollkonstanten von vornherein als vollkommen ansehen.

Sind dagegen die Koeffizienten eines inseparablen Polynoms über K mit einer Nullstelle α nicht sämtlich vollkonstant, so braucht $K(\alpha)$ nicht mehr $\mathfrak{D}$-zulässig zu sein, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 5: Es sei K ein Körper mit einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}$, $L = K(\alpha)$ sei eine einfache inseparable Erweiterung von K mit Exponenten f bezüglich K, und $\alpha^{p^f} = \beta$ sei Nullstelle des irreduziblen separablen Polynoms

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad a_\nu \in K. \tag{4.4}$$

Dann ist L dann und nur dann $\mathfrak{D}$-zulässig, wenn alle Koeffizienten a_ν in (4.4) *mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Minimalordnung f sind und die $\mathfrak{D}$-Taylorreihe $\beta_{\mathfrak{D}}\{u\}$ sich als p^f-te Potenz in $K(\alpha)\{u\}$ schreiben läßt.*

Beweis: Angenommen, $\mathfrak{D}$ sei auf $L = K(\alpha)$ fortsetzbar und fortgesetzt, und die Fortsetzung sei auch mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Dann ist wegen

$$\alpha^{p^f}{}_{\mathfrak{D}}\{u\} = (\alpha_{\mathfrak{D}}\{u\})^{p^f} = \alpha^{p^f} + u_1 p^f\ (\mathfrak{D}^{e_1}\alpha)^{p^f} + \ldots{}^{1}$$

α^{p^f} sicher mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Minimalordnung f. Angenommen, ein Koeffizient a_ν in (4.4) habe eine $\mathfrak{D}$-Konstanzordnung $\mathfrak{m} < \bar{\mathfrak{f}}$ (falls ein Koeffizient sogar $\mathfrak{D}$-inkonstant ist, ersetze man hier $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$). Dann ergibt sich aus der Gleichung

$$(\alpha^{p^f})^n + a_1(\alpha^{p^f})^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

durch Anwendung des Operators $\mathfrak{D}^{p^m}$:[4]

$$(\mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{m}}} a_1)(\alpha^{p^f})^{n-1} + (\mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{m}}} a_2)(\alpha^{p^f})^{n-2} + \ldots + (\mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{m}}} a_n) = 0. \tag{4.5}$$

Nach Voraussetzung verschwinden nicht alle Koeffizienten $\mathfrak{D}^{p^{\mathfrak{m}}} a_\nu$ in (4.5), da sie sämtlich in K liegen und (4.5) von kleinerem Grade als (4.4) ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Irreduzibilität von (4.4), der sich nur löst, wenn alle Koeffizienten von (4.4) mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Minimalordnung f sind.

Es sei nun dieses der Fall, d. h. es gelte $a_\nu \in K_{\mathfrak{D}^f}$ für alle Koeffizienten a_ν in (4.4). Dann kann $\mathfrak{D}$ zunächst auf $K(\beta)$ eindeutig fortgesetzt werden. Damit wird α Nullstelle des über $K(\beta)$ rein inseparablen irreduziblen Polynoms

$$q(t) = t^{p^f} - \beta.$$

$q(t)$ entspricht bei der Abbildung $z \to z_{\mathfrak{D}}\{u\}$ ein rein inseparables irreduzibles Polynom

$$Q(t) = t^{p^f} - \beta_{\mathfrak{D}}\{u\} = q(t) - \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta_{\mathfrak{k}}\, u^{[\mathfrak{k}p^f]\ 1} \tag{4.6}$$

mit $\beta_{\mathfrak{k}} \in K_{\mathfrak{D}^{\overline{f}}}(\beta)$, denn $\beta = \alpha^{p^f}$ hatte sich oben als mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Minimalordnung f erwiesen.

Der Isomorphismus $z \to z_{\mathfrak{D}}\{u\}$ von $K(\beta)$ auf $K(\beta)_u$ kann nun nur dann und dann eindeutig (bis auf Äquivalenz) zu einem Isomorphismus von $K(\alpha)$ auf einen Teilkörper $K(\alpha)_u$ von $K(\alpha)\{u\}$ fortgesetzt werden, wenn in (4.6) alle $\beta_{\mathfrak{k}}$ ($\mathfrak{k} > 0$) p^f-te Potenzen in $K(\alpha)$ sind. Denn dann und nur dann ist $Q(t)$ in $K(\alpha)\{u\}$ reduzibel:

$$Q(t) = (t - \alpha - \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta_{\mathfrak{k}}^{p^{-f}}\, u^{\mathfrak{k}})^{p^f},\ \beta_{\mathfrak{k}}^{p^{-f}} \in K(\alpha), \tag{4.7}$$

und dann und nur dann entspricht dem α eine Potenzreihe

$$\alpha_{\mathfrak{D}}\{u\} = \alpha + \sum_{\mathfrak{k}>0} \alpha_{\mathfrak{k}}\, u^{\mathfrak{k}} = \alpha + \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta^{p^{-f}}\, u^{\mathfrak{k}}.$$

Weiterhin entspricht $q(t)$ vermöge der Abbildung $z \to z_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\}$ ein Polynom

$$\mathfrak{Q}(t) = t^{p^f} - \beta_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\} = q(t) - \sum_{(\mathfrak{i},\mathfrak{k})>0} \beta_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, u^{[\mathfrak{i}p^f]}\, v^{[\mathfrak{k}p^f]}. \tag{4.8}$$

Angenommen, die $\beta_{\mathfrak{k}}$ der Gleichung (4.6) seien nun p^f-te Potenzen in $K(\alpha)$. Dann sind wegen der Gültigkeit von

$$\beta_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\} = \beta_{\mathfrak{D}}\{u + v\} \text{ in } K(\beta)\{u, v\}$$

auch alle $\beta_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ in (4.8) p^f-te Potenzen in $K(\alpha)$. Mithin zerfällt dann auch $\mathfrak{Q}(t)$ über $K(\alpha)$ in Linearfaktoren:

$$\mathfrak{Q}(t) = (t - \alpha - \sum_{(\mathfrak{i},\mathfrak{k})>0} \beta_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}^{p^{-f}}\, u^{\mathfrak{i}}\, v^{\mathfrak{k}})^{p^f}.$$

Also entspricht bei der Abbildung $z \to z_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\}$ in diesem Falle α eine Potenzreihe $\alpha_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\}$, sie ist Nullstelle von $\mathfrak{Q}(t)$. Aber wegen

$$\mathfrak{Q}(t) = t^{p^f} - \beta_{\mathfrak{D}}\{u + v\}$$

ist auch $\alpha_{\mathfrak{D}}\{u+v\}$ Nullstelle von $\mathfrak{Q}(t)$, und da alle Nullstellen von $\mathfrak{Q}(t)$ untereinander gleich sind, muß

$$\alpha_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{u, v\} = \alpha_{\mathfrak{D}}\{u+v\}$$

sein. Diese Gleichung aber zusammen mit der Existenz und Eindeutigkeit der Fortsetzung des Isomorphismus $K(\beta) \cong K(\beta)_u$ zu einem Isomorphismus $K(\alpha) \cong K(\alpha)_u$ bedeutet, daß $\mathfrak{D}$ eindeutig auf $K(\alpha)$ fortgesetzt werden kann[5].

Wenn $\mathfrak{D}$ nicht von K auf eine gegebene einfache inseparable Erweiterung $K(\alpha)$ fortsetzbar ist, so kann man sich die Frage stellen, ob α etwa mit den drei Eigenschaften einer Multidifferentiation[6] unverträglich ist, oder ob man vielleicht einen $\mathfrak{D}$-zulässigen Erweiterungskörper L von K finden kann, der $K(\alpha)$ als Teilkörper erhält.

Definition 7: Es sei K ein Körper mit einer Multidifferentiation $\mathfrak{D}$. Ein *Element* α aus irgendeinem Erweiterungskörper von K heiße $\mathfrak{D}$-*zulässig*, wenn ein Erweiterungskörper L von $K(\alpha)$ existiert, der $\mathfrak{D}$-zulässig ist.

Satz 6: *Es sei K ein Körper mit einer Multidifferentiation $\mathfrak{D}$, und $\alpha^{p^f} = \beta$ sei Nullstelle des separablen irreduziblen Polynoms* (4.4) *mit Koeffizienten aus K. α ist dann und nur dann $\mathfrak{D}$-zulässig, wenn alle Koeffizienten in* (4.4) *mindestens $\mathfrak{D}$-konstant der Minimalordnung f sind.*

Beweis: Ist die Minimalordnung eines Koeffizienten a_ν in (4.4) kleiner als f, so ergibt sich wie im Beweise von Satz 5 ein Widerspruch zur Irreduzibilität von (4.4), wenn α als $\mathfrak{D}$-zulässig angenommen wird.

Es seien also die Minimalordnungen aller a_ν in (4.4) mindestens f. Es ist $\mathfrak{D}$ zunächst auf $K(\beta)$ fortsetzbar und damit $\beta_{\mathfrak{D}}\{u\}$ definiert. Notwendig für die $\mathfrak{D}$-Zulässigkeit von α ist dann, daß β mindestens konstant der Minimalordnung f ist. Erfüllt $\beta_{\mathfrak{D}}\{u\}$ die Bedingung des letzten Satzes, so ist der Beweis bereits erbracht.

Oder wenigstens ein $\mathfrak{D}^{l}\beta$ ist keine p^f-te Potenz in $K(\alpha)$. Dann mögen

$$\beta^{(1)} = \mathfrak{D}^{l_1}\beta,\ \beta^{(2)} = \mathfrak{D}^{l_2}\beta,\ \beta^{(3)} = \mathfrak{D}^{l_3}\beta,\ \ldots$$

diejenigen Ableitungen von β bedeuten, die keine p^f-ten Potenzen in $K(\alpha)$ sind. Es sei nun $\alpha^{(\nu)}$ eine Nullstelle von

$$f_\nu(t) = t^{p^f} - \beta^{(\nu)}$$

und $K_\nu = K(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(\nu)})$ der durch sukzessive Adjunktion von

[5] Vergleiche [4], § 3.

[6] Vergleiche [4], Gleichung (20).

$\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(\nu)}$ entstandene Erweiterungskörper von K. Gibt es nur endlich viele $\beta^{(\nu)}$ und ist λ ihre Anzahl, so setze man $L = K_\lambda$. Bilden die $\beta^{(\nu)}$ dagegen eine unendliche Folge, so setze man L gleich dem Kompositum aller K_ν (im Körper aller über K algebraischen Elemente). Den Polynomen

$$f(t) = t^{p^f} - \beta,$$

$$f_\nu(t) = t^{p^f} - \beta^{(\nu)}$$

entsprechen vermöge der Abbildung $z \to z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ Polynome

$$F(t) = t^{p^f} - \beta_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = f(t) - \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta_{\mathfrak{k}}\, \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}p^f},$$

$$F_\nu(t) = t^{p^f} - \beta^{(\nu)}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = t^{p^f} - \Delta^{\mathfrak{k}_\nu} \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta_{\mathfrak{k}}\, \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}p^f},$$

wenn die Relation $\Delta^i z_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = (\mathfrak{D}^i z)_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ verwendet wird[7]. Diese Polynome haben in $L\{\mathfrak{u}\}$ die Nullstellen

$$\alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \alpha + \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta_{\mathfrak{k}}^{p^{-f}}\, \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}}, \tag{4.9}$$

$$\alpha^{(\nu)}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\} = \Delta^{\mathfrak{k}_\nu} \sum_{\mathfrak{k}>0} \beta_{\mathfrak{k}}^{p^{-f}}\, \mathfrak{u}^{\mathfrak{k}}$$

beziehungsweise und nur diese Nullstellen. Also läßt sich der Isomorphismus $K(\beta) \cong K(\beta)_{\mathfrak{u}}$ eindeutig (bis auf Äquivalenz) zu einen Isomorphismus $L \simeq L_{\mathfrak{u}}$ fortsetzen, wo $L_{\mathfrak{u}}$ ein Teilkörper von $L\{\mathfrak{u}\}$ ist und $\alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ und $\alpha^{(\nu)}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}\}$ gemäß (4.9) definiert sind. Daß schließlich auch

$$\alpha_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\} = \alpha_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\},$$

$$\alpha^{(\nu)}_{(\mathfrak{D},\mathfrak{D})}\{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\} = \alpha^{(\nu)}_{\mathfrak{D}}\{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}\}$$

erfüllt sind, erkennt man ähnlich wie im Beweise der entsprechenden Behauptung beim Satz 5.

5. Lösungen und Lösbarkeit.

Definition 8: Es sei K ein Körper von Primzahlcharakteristik $p \neq 0$, in dem eine Differentiation D erklärt sei; es sei $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ ein Polynom in $n+1$ unabhängigen Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots, u_n$, in dem u_n effektiv vorkommt, mit Koeffizienten in K; und schließlich seien $y, Dy, D^2y, \ldots, D^ny$ weitere $n+1$ Unbestimmte. Dann heiße die Gleichung

[7] Vergleiche [4], Gleichung (19).

$$f(y, Dy, D^2y, \ldots, D^n y) = 0 \tag{5.1}$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Formalordnung für y in K.* Gilt weiterhin $p^{t-1} \leqq n < p^t$, so heiße t die *Konstanzordnung* der Differentialgleichung. Ist schließlich $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ linear in den $u_0, u_1, \ldots, u_n$, so heiße die Differentialgleichung *linear*, ist $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ zusätzlich homogen, so heiße die Differentialgleichung *linear und homogen.*

Ein Element y aus einem D-zulässigen Erweiterungskörper K^*, das die Differentialgleichung (5.1) identisch erfüllt, heiße eine *Lösung.*

Es sei nun y eine Lösung der Differentialgleichung (5.1), und D sei regulär. Dann läßt sich nach dem t-ten Basissatze y eindeutig in der Form

$$y = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} y_\nu x^\nu \tag{5.2}$$

darstellen, wo die y_ν D-konstante Elemente der Ordnung $\geqq t$ aus K^* sind und x ein solches Element aus K ist, daß

$$Dx = 1, \; D^\nu x = 0 \qquad 1 < \nu < p^t \tag{5.3}$$

gilt. Unter Verwendung von (3.4) folgt dann, daß

$$f(\Sigma y_\nu x^\nu, \; \Sigma \binom{\nu}{1} y_\nu x^{\nu-1}, \ldots, \Sigma \binom{\nu}{n} y_\nu x^{\nu-n}) = 0 \tag{5.4}$$

erfüllt sein muß. Drückt man die Koeffizienten von $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ ebenfalls nach dem t-ten Basissatz als Polynome in x vom Formalgrade $p^t - 1$ mit Koeffizienten aus dem Körper K_{Dt} der D-konstanten Elemente mit mindestens der Ordnung t aus und beachtet man, daß die Potenz $x^\nu p^t$ mindestens D-konstant der Ordnung t wird, so läßt sich die linke Seite von (5.4) ebenfalls als Polynom in x vom Formalgrade $p^t - 1$ mit D-konstanten Koeffizienten der Ordnung $\geqq t$ aus K^* umschreiben:

$$f(\Sigma y_\nu x^\nu, \; \Sigma \binom{\nu}{1} y_\nu x^{\nu-1}, \ldots, \; \Sigma \binom{\nu}{n} y_\nu x^{\nu-n}) = \\ = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} f_\nu x^\nu, \; f_\nu \in K_{Dt}[y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}], \tag{5.5}$$

wobei die Größen f_ν auf Grund ihrer Konstruktion Polynome in $y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}$ mit Koeffizienten aus K_{Dt} sind. Aus dem Verschwinden von (5.5) gemäß (5.4) folgt das gleichzeitige Bestehen der p^t Gleichungen

$$f_\nu(y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}) = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, p^t - 1. \tag{5.6}$$

Umgekehrt, sucht man eine Lösung der Differentialgleichung (5.1), so setze man y in der Form (5.2) an, wobei die y_ν $(\nu = 0, \ldots, p^t - 1)$

zunächst als Unbestimmte aufzufassen sind. Dann läßt sich der Prozeß, der zu der Gleichung (5.5) führt, wiederholen, und man sieht, daß die Gültigkeit der Gleichungen (5.6) das Bestehen von (5.1) nach sich zieht, vorausgesetzt, daß wirklich

$$D^n y = \Sigma \binom{\nu}{n} y_\nu x^{\nu-n}$$

erfüllt ist. Kann man also D-konstante Elemente $y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}$ mit Ordnungen $\geqq t$ aus einem D-zulässigen Erweiterungskörper K^* von K bestimmen, die den Gleichungen (5.6) genügen, so ist (5.2) eine Lösung von (5.1).

Definition 9: Es sei $\mathfrak{M}$ die Nullstellenmannigfaltigkeit der Polynome

$$f_\nu (y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, p^t - 1. \tag{5.7}$$

Eine Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$, bei der sämtliche Nullstellen $\{y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}\}$ D-zulässig und D-konstant mindestens der Ordnung t sind, heiße *lösend*.

Man findet nun die Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichuug (5.1) auf folgende Weise: Ist $\mathfrak{M}$ selbst lösend, so führen alle und nur die Nullstellen $\{y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}\}$ von $\mathfrak{M}$ zu Lösungen (5.2) der Differentialgleichung. Ist $\mathfrak{M}$ nicht lösend, so können entweder lösende Teilmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{M}$ existieren, ist die lösende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ ihre Vereinigungsmenge, so führen alle und nur die Nullstellen von $\mathfrak{M}^*$ zu Lösungen (5.2) der Differentialgleichung; oder keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$ ist lösend, dann ist die Differentialgleichung unlösbar.

Definition 10: Die Dimension d der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ heiße *Transzendenzgrad der Differentialgleichung*.

Aus der Theorie der Polynomideale folgt, daß für jede Nullstelle $\{y_0, \ldots, y_{p^t-1}\}$ von $\mathfrak{M}^*$ der Transzendenzgrad der Menge $\{y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}\}$ nicht größer als die Dimension von $\mathfrak{M}^*$ ist. Also läßt sich jede Lösung der Differentialgleichung (5.1) als algebraische Funktion von höchstens d unabhängigen Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_d$ über K darstellen, wo d den Transzendenzgrad der Differentialgleichung bedeute. Wir werden stets o.B.d.A. annehmen, daß in Lösungen auftretende Parameter D-konstant mindestens der Ordnung t sind.

Satz 7: *Es sei* (5.2) *eine Lösung der Differentialgleichung* (5.1), *die* δ *über* K *unabhängige Parameter* $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$ *enthält. Dann sind die zu den* $y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}$ *gehörigen über* $K(c_1, c_2, \ldots, c_\delta)$ *irreduziblen Polynome entweder separabel mit D-konstanten Koeffizienten von Ord-*

nungen $\geqq t$ *oder inseparabel mit Exponenten* f *und D-konstanten Koeffizienten von Ordnungen* $\geqq t + f$.

Beweis: Das ist für den separablen Fall klar. Es sei also $g(z)$ das über $K(c_1, \ldots, c_\delta)$ irreduzible Polynom, das die Nullstelle y_i besitzt, und $g(z)$ sei inseparabel vom Exponenten f. Dann existiert ein über $K(c_1, \ldots, c_{p^t-1})$ irreduzibles separables Polynom $h(z)$, so daß

$$h(y_i^{p^f}) = 0$$

gilt. Nun ist D-Konstanz der Ordnung t dasselbe wie D^{p^t}-Inkonstanz, und wenn y_i D^{p^t}-inkonstant ist, dann wird $y_i^{p^f}$ D^{p^t}-konstant der Ordnung f, d. h. y_i D-konstant der Ordnung $t + f$. Daher muß $y_i^{p^f}$ mindestens D-konstant der Ordnung $t + f$ sein. Also müssen wegen der Separabilität von $h(z)$ auch alle Koeffizienten von $h(z)$ und damit auch von $g(z)$ mindestens D-konstant der Ordnung $t + f$ sein.

Satz 8: Es sei $\{y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}\}$ *eine Nullstelle von* (5.7), *die* δ *über* K *unabhängige Parameter* $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$ *enthalte. Die Nullstelle führt dann und nur dann zu einer Lösung der Differentialgleichung* (5.1), *wenn die zu den* $y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}$, *gehörigen über* $K(c_1, c_2, \ldots, c_\delta)$ *irreduziblen Polynome entweder separabel mit D-konstanten Koeffizienten von Ordnungen* $\geqq t$ *oder inseparabel mit Expontem* f *und D-konstanten Koeffizienten von Ordnungen* $\geqq t + f$ *sind.*

Beweis: Sind die Bedingungen des Satzes erfüllt, so sind nach Satz 6 die $y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}$ sicher D-zulässig, daß sie auch D-konstant mindestens von der Ordnung t sind, sieht man ähnlich wie im Beweise von Satz 7. Die Umkehrung folgt aus Satz 7.

Definition 11: Eine Lösung (5.2) der Differentialgleichung (5.1) heiße *allgemein*, wenn $\{y_0, y_1, \ldots, y_{p^t-1}\}$ eine allgemeine Nullstelle von $\mathfrak{M}^*$ ist. Jede nicht allgemeine Lösung heiße *partikulär*.

Eine Differentialgleichung besitzt also eine allgemeine Lösung dann und nur dann, wenn die lösende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^*$ irreduzibel ist[8].

Abschließend sei noch bemerkt, daß man sich auf die Untersuchung solcher Differentialgleichungen beschränken kann, bei denen das definierende Polynom $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$, das zu (5.1) führt, über allen D-zulässigen algebraischen Erweiterungen von K irreduzibel bleibt.

---

[8] Vergleiche [5], Kapitel XIII.

6. Integration und Integrierbarkeit.

Wie bei der Behandlung von Differentialgleichungen im klassischen Sinne kann man auch hier Differentialoperatoren einführen, sie sind — genauer gesagt — Operatoren der additiven Gruppe des Körpers K, in dem die vorkommenden Differentiationen definiert sind. Die Multiplikation, Addition und Vertauschbarkeit von Operatoren in K werde wie üblich definiert.

Sind A und B zwei Differentiationen in K, so muß man die *Summe* $A + B$ *der Differentialoperatoren* A und B, die stets erklärt ist, von der *Differentiation* $A + B$ unterscheiden, die nur definiert ist, wenn A und B vertauschbar sind[9]. Das mag zunächst verwirrend erscheinen, aber im Grunde ist diese Doppeldeutigkeit bereits bei dem Symbol A gegeben, das — für sich alleinstehend — sowohl die *Differentiation* A als auch den *Differentialoperator* A bedeuten kann.

Auch die Elemente $x \in K$ lassen sich wie üblich als Operatoren der additiven Gruppe von K auffassen, wir werden sie dann gelegentlich als $x\,D^0$ schreiben und ebenfalls formal als Differentialoperatoren sehen. Sind $D, D_1, D_2, \ldots$ Differentiationen in K und $x, y, z, \ldots$ Elemente aus K, so entsteht jeder Differentialoperator aus $D, D_1, D_2, \ldots$ und $x, y, z, \ldots$ durch endlich viele sukzessive Summen- und Produktbildungen. Unter allen Differentialoperatoren sind dann diejenigen der Form D ausgezeichnet.

Definition 12: Ein Differentialoperator A heiße *rein*, wenn er sich in der Form $A = D^k$ schreiben läßt, wobei D eine Differentiation ist.

Hilfssatz 3: Definiert man die Differentialoperatoren D^{-ip^k} durch

$$D^{-ip^k} = i \sum_{\lambda=0}^{p-1-i} (-1)^\lambda \frac{x^{(\lambda+i)p^k}}{\lambda+i} D^{\lambda p^k} \text{ für } i=1,2,\ldots,p-1;$$
$$k = 1,2,\ldots \tag{6.1}$$

und $D^{-0} = D^0$, so gilt die Produktregel

$$D^{jp^k} D^{-ip^k} w = \binom{i}{j} D^{(j-i)p^k} w, \quad i, j = 0, 1, \ldots, p-1, j \leqq i; \; w \in K, \tag{6.2}$$

falls

$$D^{(p-i)p^k} w = 0 \tag{6.3}$$

gilt.

Beweis durch Induktion nach j bei festem i. Für $j = 0$ gilt die Regel trivialerweise. Für $j = 1$ hat man

[9] Vergleiche [4], § 7.

$$D^{pk}\ D^{-ipk}\ w = D^{pk}\left(i\sum_{\lambda=0}^{p-1-i}(-1)^{\lambda}\frac{x^{(\lambda+i)\,pk}}{\lambda+i}\ D^{\lambda pk}\ w\right) =$$

$$= i\sum_{\lambda=0}^{p-1-i}(-1)^{\lambda}\,x^{(\lambda+i-1)\,pk}\,D^{\lambda pk}\,w + i\sum_{\lambda=0}^{p-1-i}(-1)^{\lambda}\ \frac{x^{(\lambda+i)\,pk}}{(\lambda+i)}\,(\lambda+1)\,D^{(\lambda+1)\,pk}\,w$$

oder mit der Substitution $\lambda + 1 = \mu$ in der zweiten Summe:

$$D^{pk}\ D^{-ipk}\ w =$$

$$= i\sum_{\lambda=0}^{p-1-i}(-1)^{\lambda}\,x^{(\lambda+i-1)\,pk}\ D^{\lambda pk}\ w + i\sum_{\mu=1}^{p-i}(-1)^{\mu-1}\cdot\mu\cdot\frac{x^{(\mu+i-1)\,pk}}{\mu+i-1}\,D^{\mu pk}\ w.$$

In der zweiten Summe kann man die Summation formal bei $\mu = 0$ anfangen und bei der ersten Summe formal bis $\lambda = p - i$ weitergehen, weil der Summand für $\lambda = p - i$ wegen (6.3) verschwindet. Faßt man die beiden Summen zusammen, so folgt:

$$D^{pk}\ D^{-ipk}\ w = \sum_{\nu=0}^{p-i}(-1)^{\nu}\,i\left(1-\frac{\nu}{\nu+i-1}\right)x^{(\nu+i-1)\,pk}\ D^{\nu pk}\,w =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^{\nu}\frac{i\,(i-1)}{\nu+i-1}\ x^{(\nu+i-1)\,pk}\ D^{\nu pk}\,w = \binom{i}{1}\,D^{(1-i)\,pk}\ w.$$

Also ist (6.2) für $j = 1$ erfüllt. Es sei nun schon gezeigt, daß (6.2) für alle $j < J\ (< p)$ bei beliebigem i richtig ist. Dann wird

$$D^{Jpk}\cdot D^{-ipk}\,w = \frac{1}{J}\ D^{(J-1)\,pk}\ D^{pk}\ D^{-ipk}\,w =$$

$$= \frac{1}{J}\ \binom{i}{J-1}\ D^{pk}\ D^{(J-1-i)\,pk}\ w,$$

indem man den zweiten und dritten Operator unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung zusammenfaßt. Die beiden übriggebliebenen Operatoren lassen sich aber ebenfalls nach der Induktionsvoraussetzung vereinigen, das ergibt schließlich

$$D^{Jpk}\ D^{-ipk}\ w = \frac{1}{J}\ \binom{i}{J-1}\ \binom{i+1-J}{1}\ D^{(J-i)\,pk} = \binom{i}{J}\ D^{(J-i)\,pk}\ w.$$

Hilfssatz 4: Es gilt die Operatorengleichung

$$\prod_{\nu=0}^{s} D^{n_\nu\,p^\nu} = D^{\sum_{\nu=0}^{s} n_\nu\,p^\nu}.$$

Beweis: Das ist für $s = 1$ klar. Nun gilt

$$D^{\sum_{\nu=0}^{s} n_\nu p^\nu} D^{n_{s+1} p^{s+1}} = \binom{\sum_{\nu=0}^{s+1} n_\nu p^\nu}{n_{s+1} p^{s+1}} D^{\sum_{\nu=0}^{s+1} n_\nu p^\nu}$$

und nach Hilfssatz 1 wird der Binomialkoeffizient gleich Eins.

Hilfssatz 5: Es seien $n = \sum_{\nu=0}^{r} n_\nu p^\nu$, $\lambda = \sum_{\nu=0}^{r} \lambda_\nu p^\nu$ die p-adischen Entwicklungen von n und λ beziehungsweise. Wird der Operator D^{-n} durch

$$D^{-n} = \prod_{\nu=0}^{r} D^{-n_\nu p^\nu} \tag{6.4}$$

definiert, so gilt

$$D^{-n} = \sum_{\lambda_0=0}^{p-1-n_0} \sum_{\lambda_1=0}^{p-1-n_1} \dots \sum_{\lambda_r=0}^{p-1-n_r} \prod_{\nu=0}^{r} \frac{n_\nu}{\lambda_\nu + n_\nu} x^{n+\lambda} D^\lambda \quad (\text{mit } \frac{0}{0} = 1).$$

Beweis: Unter Benutzung von (6.1) wird aus (6.4)

$$D^{-n} = \left(\sum_{\lambda_0=0}^{p-1-n_0} \frac{n_0}{\lambda_0 + n_0} x^{(\lambda_0+n_0)} D^{\lambda_0} \right) \left(\sum_{\lambda_1=0}^{p-1-n_1} \frac{n_1}{\lambda_1 + n_1} x^{(\lambda_1+n_1)p} D^{\lambda_1 p} \right) \dots .$$

Die Potenzen von x im ϱ-ten Faktor ($\varrho > 1$) dieses Operatorenproduktes sind D-konstant der Ordnung ϱ, sie kommutieren mit allen in früheren Faktoren auftretenden $D^{\lambda_\nu p^\nu}$, da diese höchstens p^ϱ — 1-te Ableitungen enthalten. Also kann man alle $D^{\lambda_\nu p^\nu}$ nach rechts durchziehen. Mit Hilfssatz 4 folgt die Behauptung.

Definition 13: Ist A ein reiner Differentialoperator, so heiße die Differentialgleichung $Ay = w$ *rein*, und ihre Lösungen seien *Integrale* genannt.

Satz 9: *Es seien* $n = \sum_{\nu=0}^{r} n_\nu p^\nu$, $n_r \neq 0$; $k = \sum_{\nu=0}^{r} k_\nu p^\nu$ *die p-adischen Entwicklungen von n und k beziehungsweise. Die reine Differentialgleichung*

$$D^n y = w, \qquad w \in K, \tag{6.5}$$

in K für y ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$D^{(p-n_\nu)p^\nu} w = 0 \tag{6.6}$$

für alle diejenigen ν ($0 \leqq \nu \leqq r$) *gilt, für die* $n_\nu \neq 0$ *ist. Wenn die Integrabilitätsbedingung* (6.6) *erfüllt ist, so ist*

$$y = D^{-n} w + \sum_{(\text{alle } k_\nu \text{ für die } \binom{k}{n} = 0)}^{r} c_k x^k \tag{6.7}$$

ein allgemeines Integral von (6.5) *in einem Körper L, der aus K durch Adjunktion der Parameter* c_μ *entsteht, und auf den D so fortgesetzt ist, daß die* c_μ *D-konstant mindestens der Ordnung* $r+1$ *sind. Die Summe in* (6.7) *enthält*

$$a(n) = p^{r+1} - \prod_{\nu=0}^{r} (p - n_\nu) \qquad (\geqq n) \tag{6.8}$$

Glieder.

Beweis: Nach Hilfssatz 4 gilt

$$D^n y = D^{n_0} D^{n_1 p} \ldots D^{n_r p^r} y = w. \tag{6.9}$$

Für jedes ν, für das $n_\nu \neq 0$ ist, d. h. für das $D^{n_\nu p^\nu}$ effektiv in (6.9) vorkommt, ist

$$D^{(p-n_\nu) p^\nu} \; D^{n_\nu p^\nu}$$

gleich dem Nulloperator nach der Iterationsregel (1.3) für Differentiationen. Da alle Operatoren $D^{n_\nu p^\nu}$ in (6.9) vertauschbar sind, folgt (6.6) bei obiger Bedingung für ν als notwendig für die Lösbarkeit von (6.5).

Zunächst werde nun gezeigt, daß unter der Bedingung (6.6) $y = D^{-n} w$ eine partikuläre Lösung von (6.5) ist. Wegen Hilfssatz 3 stimmt das sicher für alle $n = n_k p^k$, d. h. für alle n, die Vielfache einer Potenz von p sind. Wir beweisen $D^n D^{-n} w = w$ unter den Bedingungen (6.6) nun durch Induktion nach der Anzahl a der in der p-adischen Entwicklung von n von Null verschiedenen Summanden. Es sei also die Behauptung bereits für alle n gezeigt, deren Anzahl a nichtverschwindender Summanden in ihrer p-adischen Entwicklung $a \leqq A$ ist. Es sei dann m eine Zahl, bei der diese Anzahl von Summanden $A+1$ ist. Gilt $m = \sum_{\nu=0}^{r} m_\nu p^\nu$ und $m_\nu = 0$ für $\nu < \lambda$, aber $m_\lambda \neq 0$, so kann m wie folgt aufgespalten werden: $m = m_\lambda p^\lambda + n$, wobei n eine Zahl mit A p-adischen Summanden ist. Nun gilt kraft des Hilfssatzes 4 und der Definition (6.4):

$$D^m D^{-m} w = D^n D^{m_\lambda p^\lambda} \; D^{-m_\lambda p^\lambda} D^{-n} w.$$

Mit der Abkürzung $D^{-n} w = w^*$ folgt aber unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung und Beachtung, daß mit

$$D^{(p-m_\lambda) p^\lambda} w = 0$$

auch

$$D^{(p-m_\lambda)\,p^\lambda}\, w^* = 0$$

gilt,

$$D^{m_\lambda\, p^\lambda}\, D^{-m_\lambda\, p^\lambda}\, w^* = w^*$$

oder

$$D^m\, D^{-m}\, w = D^n\, w^* = D^n\, D^{-n}\, w.$$

Durch erneute Anwendung der Induktionsvoraussetzung erweist sich

$$D^n\, D^{-n}\, w = w$$

und damit

$$D^m\, D^{-m}\, w = w.$$

Also ist stets $y = D^{-n}\, w$ eine partikuläre Lösung von (6.5), sobald (6.6) erfüllt ist.

Es muß nun noch gezeigt werden, daß in (6.7) $y = \sum_{k \text{ so daß } \binom{k}{n}=0}^{r} c_k\, x^k$ in L die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $D^n\, y = 0$ ist. Mit dem Ansatz (5.2) in unbestimmten Koeffizienten wird

$$D^n\, y = \sum_k y_k \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

Diese Summe verschwindet dann und nur dann, wenn für alle k, für die $\binom{k}{n} \neq 0$ ist, $y_k = 0$ gilt. Diejenigen y_k, für deren k $\binom{k}{n} = 0$ ist, können dabei als beliebige D-Konstante der Ordnung $r+1$ gewählt werden.

Nach Hilfssatz 1 ist $\binom{k}{n} \equiv 0 \pmod{p}$ für alle und nur diejenigen $k = \sum_{\nu=0} k_\nu\, p^\nu$, bei denen wenigstens ein $k_\nu < n_\nu$ ist. Die Anzahl derjenigen y_k, bei denen alle $k_\nu \geqq n_\nu$ sind, ist $\prod_{\nu=0}^{r} (p - n_\nu)$; und die Anzahl aller $k = \sum_{\nu=0}^{r} k_\nu\, p^\nu$ ist p^{r+1}. Ihre Differenz ergibt die Anzahl $a(n)$ der beliebig wählbaren k, und damit ist (6.8) bewiesen.

Da bei Charakteristik Null $\binom{k}{n} = 0$ für n Werte von k ist, folgt $a(n) \geqq n$.

7. Lineare Differentialgleichungen.

Es sei

$$\sum_{\mu=0}^{m} f^\mu\, D^\mu\, y = 0,\ f^\mu \in K,\ \mu = 0, \ldots, p^s - 1, \tag{7.1}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung m-ter Formalordnung mit

einer regulären Differentiation D in einem Körper K und so normiert, daß $f^m = 1$ ist. Es sei

$$m = \sum_{\nu=0}^{s-1} m_\nu p^\nu, \qquad m_{s-1} \neq 0,$$

die p-adische Entwicklung von m, also s die Konstanzordnung der Differentialgleichung, und

$$f^\mu = \sum_{\beta=0}^{p^s-1} f_\beta^\mu x^\beta, \quad f_\beta^\mu \in K_{D^s}, \qquad \begin{matrix} \mu = 0, \ldots, m, \\ \beta = 0, \ldots, p^s - 1, \end{matrix} \tag{7,2}$$

die nach dem Basissatz eindeutige Darstellung der f^μ über K_{D^s}. Dann kann man die Lösung in der unbestimmten Form (5.2) ansetzen und erhält durch Differenzieren:

$$D^\mu y = \sum_{\alpha=0}^{p^s-1-\mu} \binom{\alpha+\mu}{\mu} y_{\alpha+\mu} x^\alpha, \quad \mu < p^s.$$

Hieraus folgt

$$f^\mu D^\mu y = \sum_{\beta=0}^{p^s-1} \sum_{\alpha=0}^{p^s-1-\mu} f_\beta^\mu \binom{\alpha+\mu}{\mu} y_{\alpha+\mu} x^{\alpha+\beta}$$

oder mit den Substitutionen $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha + \beta - p^s = \delta$ und durch Abspaltung der Summanden mit einem Grade $\geqq p^s$ in x:

$$f^\mu D^\mu y = \sum_{\gamma=0}^{p^s-1} \sum_{\alpha=0}^{\gamma} f_{\gamma-\alpha}^\mu \binom{\alpha+\mu}{\mu} y_{\alpha+\mu} x^\gamma + x^{p^s} \sum_{\delta=0}^{p^s-2} \sum_{\alpha=1}^{p^s-1} f_{\delta+p^s-\alpha}^\mu \binom{\alpha+\mu}{\mu} y_{\alpha+\mu} x^\delta, \tag{7.3}$$

wobei noch formal

$$y_\alpha = 0 \text{ für } \alpha \geqq p^s \tag{7.4}$$

gesetzt ist. Definiert man weiterhin

$$f_\beta^\mu = 0 \text{ für } \beta < 0 \text{ und für } \beta \geqq p^s, \tag{7.5}$$

so läßt sich in (7.3) α in der ersten Summe bis $p^s - 1$ fortführen, und in der zweiten Summe kann α bereits mit Null anfangen, außerdem darf dann δ formal bis $p^s - 1$ laufen. Damit wird aus (7.3)

$$f^\mu D^\mu y = \sum_{\gamma=0}^{p^s-1} \sum_{\alpha=0}^{p^s-1} \binom{\alpha+\mu}{\mu} (f_{\gamma-\alpha}^\mu + x^{p^s} f_{\gamma+p^s-\alpha}^\mu) y_{\alpha+\mu} x^\gamma, \; \mu < p^s,$$

oder, wenn man noch die Abkürzung

$$f_{\gamma-\alpha}^\mu + x^{p^s} f_{p^s+\gamma-\alpha}^\mu = g_{\gamma-\alpha}^\mu, \qquad \alpha, \gamma, \mu = 0, 1, \ldots, p^s - 1, \tag{7.6}$$

verwendet:

$$f^{\mu} D^{\mu} y = \sum_{\gamma=0}^{p^s-1} \sum_{\alpha=0}^{p^s-1} \binom{\alpha+\mu}{\mu} g^{\mu}_{\gamma-\alpha} y_{\alpha+\mu} x^{\gamma}.$$

Damit nimmt (7.1) die Form an:

$$\sum_{\mu=0}^{p^s-1} f^{\mu} D^{\mu} y = \sum_{\gamma=0}^{p^s-1} \sum_{\mu=0}^{p^s-1} \sum_{\alpha=0}^{p^s-1} \binom{\alpha+\mu}{\mu} g^{\mu}_{\gamma-\alpha} y_{\alpha+\mu} x^{\gamma} = 0.$$

Wegen des Basissatzes müssen alle Koeffizienten von x einzeln verschwinden, d. h.

$$\sum_{\mu=0}^{p^s-1} \sum_{\alpha=0}^{p^s-1} \binom{\alpha+\mu}{\mu} g^{\mu}_{\gamma-\alpha} y_{\alpha+\mu} = 0 \text{ für } \gamma = 0, 1, \ldots, p^s - 1,$$

$$\sum_{\delta=0}^{p^s-1} \sum_{\mu=0}^{\delta} \binom{\delta}{\mu} g^{\mu}_{\gamma+\mu-\delta} y_{\delta} = 0 \quad \text{für } \gamma = 0, 1, \ldots, p^s - 1, \tag{7.7}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ der Gleichungen (7.7) ist von der Form:

$$a_{\gamma\delta} = \sum_{\mu=0}^{\delta} \binom{\delta}{\mu} g^{\mu}_{\gamma+\mu-\delta}, \qquad \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, p^s - 1,$$

oder mit $\gamma + 1 = i$, $\delta + 1 = k$ in der üblichen Zählweise:

$$a_{ik} = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{k-1}{\mu} g^{\mu}_{i-k+\mu}, \qquad i, k = 1, \ldots, p^s, \tag{7.8}$$

wobei μ nur bis m zu laufen braucht, da $g^{\mu}_{\alpha} = 0$ für $\mu > m$ und alle α bei einer Differentialgleichung m-ter Formalordnung ist. Also hat man, ausführlich aufgeschrieben:

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{array}{l} \binom{0}{0} g^0_0, \binom{1}{0} g^0_{-1} + \binom{1}{1} g^1_0, \binom{2}{0} g^0_{-2} + \binom{2}{1} g^1_{-1} + \binom{2}{2} g^2_0, \ldots \\ \binom{0}{0} g^0_1, \binom{1}{0} g^0_0 + \binom{1}{1} g^1_1, \binom{2}{0} g^0_{-1} + \binom{2}{1} g^1_0 + \binom{2}{2} g^2_1, \ldots \\ \binom{0}{0} g^0_2, \binom{1}{0} g^0_1 + \binom{1}{1} g^1_2, \binom{2}{0} g^0_0 + \binom{2}{1} g^1_1 + \binom{2}{2} g^2_2, \ldots \\ \quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \\ \binom{0}{0} g^0_{p^s-1}, \binom{1}{0} g^0_{p^s-2} + \binom{1}{1} g^1_{p^s-1}, \binom{2}{0} g^0_{p^s-3} + \binom{2}{1} g^1_{p^s-2} + \binom{2}{2} g^2_{p^s-1}, \ldots \end{array} \right\} \tag{7.9}$$

Die Lösungen der Differentialgleichung (7.1) lassen sich nun mittels Linearer Algebra durch Auswertung von (7.9) gewinnen. Daher ist, abgesehen von der Adjunktion von Parametern, keine Körpererweiterung nötig. Offenbar existiert im Falle linearer Differentialgleichungen eine allgemeine Lösung (falls überhaupt eine Lösung existiert), und ihre Dimension ist gleich $p^s - r$, wenn r der Rang der Matrix (7.9) ist.

Um eine obere Grenze für den Transzendenzgrad der Differentialgleichung (7.1) zu bekommen, betrachte man die $p^s - m$-reihige quadratische Teilmatrix $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, die durch Streichen der $p^s - m + 1$-ten und

aller folgenden Zeilen und der ersten bis m-ten Spalte aus (7.9) entsteht, d. h. die Matrix

$$b_{ik} = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{k+m-1}{\mu} g_{i-k-m+\mu}^{\mu}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, p^s - m. \tag{7.10}$$

In der Matrix (7.10) greife man die Elemente jenseits der Hauptdiagonale heraus, d. h. für die $i - k < 0$ gilt. Bei allen Summanden in jedem dieser Elemente werden die unteren Indices der $g's$ negativ, also gilt für sie unter Verwendung von (7.6) und (7.5):

$$b_{ik} \equiv 0 \pmod{x^{p^s}}, \; i < k.$$

Daher sind die Elemente der Hauptdiagonale in (7.10) gleichzeitig die Eigenwerte ihrer Matrix modulo x^{p^s}; für sie ergibt sich

$$b_{ii} = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{i+m-1}{\mu} g_{\mu-m}^{\mu} \equiv \binom{i+m-1}{m} g_0^m \pmod{x^{p^s}}, \qquad i = 1, \ldots, p^s - m$$

und wegen der Normierung $g_0^m = 1$:

$$b_{ii} \equiv \binom{m+i-1}{m} \pmod{x^{p^s}}, \; i = 1, \ldots, p^s - m. \tag{7.11}$$

Also ist der Rang der Matrix (7.10) mindestens gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Binomialkoeffizienten (7.11). Zwischen m einschließlich und p^s ausschließlich gibt es aber genau $\prod_{\nu=0}^{s-1} (p - m_\nu)$ Zahlen, deren sämtliche p-adischen Koeffizienten nicht kleiner als diejenigen von m sind, und nach Hilfssatz 1 ist dann $\prod_{\nu=0}^{s-1} (p - m_\nu)$ die Anzahl nichtverschwindender Binomialkoeffizienten (7.11). Daher ist dieses auch der Rang von (7.11) modulo x^{p^s}, und hieraus ergibt sich für den Rang r der gesamten Matrix (7.9) die Ungleichung

$$r \geqq \prod_{\nu=0}^{s-1} (p - m_\nu).$$

Daher hat die Differentialgleichung (7.1) höchstens die Dimension $a(n)$, definiert in (6.8). Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß für reine Differentialgleichungen der Transzendenzgrad genau gleich $a(n)$ ist. Andererseits gibt es homogene lineare Differentialgleichungen, die nur die identisch verschwindende Lösung besitzen, nämlich z. B. die Differentialgleichung

$$D\,y + x^{p-1}\,y = 0.$$

Also folgt insgesamt:

Satz 10: *Für den Transzendenzgrad d einer linearen homogenen Differentialgleichung der Formalordnung n gilt*:

$$0 \leqq d \leqq a\,(n).$$

Um bei einer gegebenen Differentialgleichung (7.1) den genauen Transzendenzgrad zu finden, sind natürlich genauere Untersuchungen der Matrix (7.9) notwendig, bei denen man vorteilhaft das Paskalsche Dreieck modulo p zu Hilfe zieht, um die Gestalt der Matrix (7.9) zu vereinfachen.

Bei der Bestimmung von Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\sum_{\mu=0}^{m} f^{\mu}\,D_y^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{p^s-1} h_\nu\,x^\nu,\ f^{\mu} \in K, h_\nu \in K_{D^s}\,, \tag{7.12}$$

wird man ähnlich vorgehen. Man muß dann zunächst feststellen, ob der Rang von (7.9) gleich dem Rang der Matrix ist, die aus (7.9) durch Hinzufügung des Spaltenvektors $(h_0, h_1, \ldots, h_{p^s-1})$ entsteht. Wenn dieses nicht der Fall ist, hat die Differentialgleichung (7.12) keine Lösungen, wie z. B. die Differentialgleichung $D\,y = x^{p-1}$. Andernfalls setzt sich wie in der klassischen Theorie die allgemeine Lösung von (7.12) aus einer partikulären Lösung von (7.12) und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (7.1) zusammen, d. h. dann gilt der Satz 10 auch für (7.12).

8. Zwei Beispiele linearer Differentialgleichungen.

Satz 11: *Es sei K ein Körper der Charakteristik $p \neq 2$, in dem eine reguläre Differentiation D gegeben ist, und α, β, γ seien Elemente seines Primkörpers. Repräsentiert man α, β, γ durch die Zahlen $1, 2, \ldots, p$, so hat die Hypergeometrische Differentialgleichung*[10]

$$2\,x\,(1-x)\,y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x\}\,y' - \alpha\,\beta\,y = 0 \tag{8.1}$$

den Transzendenzgrad 2, falls $\gamma \neq 1$ und $\alpha < \gamma \leqq \beta$ oder $\beta < \gamma \leqq \alpha$ gilt, und sonst den Transzendenzgrad 1.

Beweis: Durch den Ansatz (5.2) mit unbestimmten Koeffizienten erhält man wie bei der klassischen Differentialgleichung die p-Gleichungen

$$y_{\mu+1}(\mu+1)(\mu+\gamma) = y_\mu(\mu+\alpha)(\mu+\beta), \mu = 0,1,\ldots,p-2, \qquad (8.2)$$
$$0 = y_{p-1}(p-1-\alpha)(p-1-\beta).$$

Ihre Koeffizientenmatrix ist

$$\left\{\begin{array}{cccc} \alpha\beta & -1\,.\,\gamma & & \\ (\alpha+1)(\beta+1) & -2(\gamma+1) & & 0 \\ & (\alpha+2)(\beta+2) & . & \\ & & . \quad . \quad . & \\ & & . \quad . \quad . & \\ 0 & & (\alpha+p-2)(\beta+p-2) & -(p-1)(\gamma+p-2) \\ & & & (\alpha+p-1)(\beta+p-1) \end{array}\right\}, \qquad (8.3)$$

sie enthält von Null verschiedene Elemente nur in der Hauptdiagonale und der darüberliegenden Diagonale. Man repräsentiere nun α, β, γ durch die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ und zähle in (8.3) durchweg die Zeilen und Spalten von unten oder hinten, worauf jeweils durch die Vorsilbe „Rück" hingewiesen werde.

Dann hat man bei der Hauptdiagonale in der α-ten und β-ten Rückzeile und nur in diesen beiden Zeilen (die für $\alpha = \beta$ zusammenfallen) Nullen. Also ist der Rang $r(\alpha, \beta, \gamma)$ der Matrix (8.3), der eine Funktion von α, β, γ ist, entweder $p-1$ oder $p-2$. Man sieht sofort:

$$r(\alpha, \alpha, \gamma) = p-1. \qquad (8.4)$$

In der über der Hauptdiagonale liegenden Diagonale tritt eine Null dann und nur dann auf, wenn $\gamma \neq 1$, nämlich in der γ-ten Rückzeile, die übrigen Glieder dieser Diagonale verschwinden nicht. Also hat man

$$r(\alpha, \beta, 1) = p-1. \qquad (8.5)$$

Für das Folgende nehme man $\gamma \neq 1$ sowie, da die Differentialgleichung in α und β symmetrisch ist, o.B.d.A. $\alpha < \beta$ an. Außerdem bezeichne man das Element der Matrix (8.3) in der i-ten Rückzeile und der k-ten Rückspalte abkürzend mit a_{ik}, d. h.

$$a_{jj} = (\alpha - j)(\beta - j), \qquad j = 1, \ldots, p, \qquad (8.6)$$
$$a_{j\,j-1} = (j-1)(\gamma - j), \qquad j = 2, \ldots, p.$$

Durch Streichen der α-ten Rückzeile und der β-ten Rückspalte erhält man aus (8.3) mit den Abkürzungen (8.6) die Matrix:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{p\,p-1} & & & & & & & & & & & & \\
a_{p\,p-1} & a_{p-1,\,p-2} & & & & & & & 0 & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \\
 & & & a_{\beta+2,\,\beta+1} & & & & & & & & & \\
 & & 0 & a_{\beta+1,\,\beta+1} & 0 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & a_{\beta,\,\beta-1} & 0 & & & & & & & \\
 & & & & a_{\beta-1,\,p-1} & a_{\beta-1,\,\beta-2} & 0 & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & 0 & & & & & a_{\alpha+2,\,\alpha+1} & 0 & & & \\
 & & & & & & & a_{\alpha+1,\,\alpha+1} & a_{\alpha+1,\,\alpha} & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 0 & a_{\alpha-1,\,\alpha-1} & a_{\alpha-1,\,\alpha-2} & & \\
 & & & & & & & & & 0 & a_{\alpha-2,\,\alpha-2} & a_{\alpha-2,\,\alpha-3} & \\
 & & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & & \cdot
\end{array}
\tag{8.7}
$$

Angenommen, es verschwinde keines der Elemente a_{jj-1} für $\alpha + 2 \leqq j \leqq \beta$. Dann ist der Wert der Determinante dieser Matrix gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, denn in diesem Falle kann man durch Determinantenumformung ohne Änderung der übrigen Elemente zunächst $a_{\beta-1,\,\beta-1}$ und dann auf gleiche Weise sukzessiv die übrigen Elemente unterhalb der Hauptdiagonale zum Verschwinden bringen.

Die Elemente a_{jj} in der Hauptdiagonale von (8.7) können wegen des Streichens der α-ten Rückzeile und der β-ten Rückspalte nicht verschwinden, aber eines der Elemente $a_{j,\,j-1}$ ($\alpha - 1 \leqq j \leqq \beta$) in der Hauptdiagonale von (8.7) wird wegen (8.6) Null, sobald $\alpha - 1 \leqq \gamma \leqq \beta$ gilt. Ist jedoch $\gamma > \beta$ oder $\gamma \leqq \alpha$, so verschwindet die Determinante der Matrix (8.7) nicht, und damit ergibt sich weiterhin:

$$r(\alpha, \beta, \gamma) = p - 1 \text{ für } \alpha < \beta,\ \gamma \neq 1;\ \gamma > \beta \text{ oder } \gamma \leqq \alpha. \tag{8.8}$$

In dem Falle $\alpha < \gamma \leqq \beta$ ($\gamma \neq 1$) dagegen wird der Rang $r(\alpha, \beta, \gamma)$ von (8.7) $p - 2$, was man diesmal wohl am einfachsten aus den Glei-

chungen (8.2) abliest: 1. $\gamma < \beta$. Man bestimme $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ in ihrer natürlichen Reihenfolge. y_0 kann beliebig gewählt werden, da $\gamma \neq 1$ ist. Die folgenden $y_1, y_2, \ldots$ ergeben sich dann vermöge (8.2) rekursiv als gewisse Vielfache von y_0; als Erstes verschwindet $y_{p-\beta+1}$, die darauffolgenden y verschwinden ebenfalls bis zu $y_{p-\gamma}$ einschließlich. $y_{p-\gamma+1}$ ist dagegen mit den $y's$ niedrigen Indexes nicht durch eine Relation verbunden, kann also beliebig gewählt werden, solange eine spätere Relation dem nichts entgegensteht. Die nächstfolgenden y bestimmen sich wieder als gewisse Vielfache von $y_{p-\gamma+1}$. $y_{p-\alpha+1}$ wird dagegen Null und die nachfolgenden letzten y auch, falls $\alpha \geqq 2$ gilt; ist dagegen $\alpha=1$, so folgt $0 . y_{p-1}=0$; also in beiden Fällen führt die Annahme, daß $y_{p-\gamma+1}$ willkürlich gewählt werden kann, zu keinem Widerspruch mit späteren Relationen.

2. $\gamma = \beta$. y_0 kann beliebig gewählt werden, da $\gamma \neq 1$ ist, die folgenden y ergeben sich dann rekursiv als gewisse Vielfache von y_0 bis zu $y_{p-\beta}$ einschließlich. $y_{p-\beta+1}$ ist dagegen mit den $y's$ niedrigen Indexes nicht durch eine Relation verbunden, kann also beliebig gewählt werden, solange keine spätere Relation dem nicht entgegensteht. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man genau so wie bei 1.

Damit ist Satz 11 vollständig bewiesen.

Satz 12: Es sei K ein Körper von Primzahlcharakteristik $p \neq 2$, in dem eine reguläre Differentiation D erklärt ist, und n sei ein D-konstantes Element. Die Besselsche Differentialgleichung[10]

$$2\,x\,D^2\,y + x\,D\,y + (x^2 - n^2)\,y = 0 \tag{8.9}$$

besitzt nur die Nullösung $y = 0$.

Beweis: Mit dem Ansatz (5.2) folgt aus (8.9)

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} (\nu^2 - n^2)\,y_\nu\,x^\nu + \sum_{\nu=2}^{p+1} y_{\nu-2}\,x^\nu = 0$$

und daraus vermöge des Basissatzes:

$$\begin{aligned} -n^2\,y_0 + y_{p-2}\,x^p &= 0 \\ (1-n^2)\,y_1 + y_{p-1}\,x^p &= 0 \\ (\nu^2 - n^2)\,y_\nu + y_{\nu-2} &= 0 \text{ für } \nu = 2, 3, \ldots, p-1. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Die Koeffizientendeterminante von (8.10)

[10] Falls $p \neq 2$, so ist die zweite Ableitung im klassischen Sinne dem Operator $DD = 2\,D^2$ gleich. Aus diesem Grunde tritt der Faktor 2 in der Differentialgleichung auf.

$$\begin{vmatrix} 0-n^2 & & & & x_p & 0 \\ 0 & 1-n^2 & & & & x^p \\ 1 & 0 & 4-n^2 & \cdots & 0 & \\ & 1 & 0 & \cdots & & \\ & & 1 & \cdots & & \\ & 0 & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & 0 & (p-1)^2-n^2 \end{vmatrix} = x^{2p} + \ldots$$

ist ein normiertes Polynom in x vom Grade $2p$ und verschwindet daher nicht. Also müssen alle y_ν verschwinden.

9. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ähnlich wie im klassischen Falle sind auch in der vorliegenden Theorie die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten einer besonders einfachen Behandlung zugänglich, wenn man Operatormethoden anwendet, aber gerade hierbei zeigt sich deutlich der strukturelle Unterschied zu den klassischen Differentialgleichungen. Es genügt übrigens hier, die in der Differentialgleichung auftretenden Koeffizienten nur als konstant von mindestens der Konstanzordnung der Differentialgleichung anzunehmen, und in diesem Sinne werde die Abkürzung „mit konstanten Koeffizienten" verstanden.

Definition 14: Es sei K ein Körper von Primzahlcharakteristik mit einer Differentiation D. Der Ring aller Operatoren $\sum_{\nu=0}^{p^t-1} a_\nu D^\nu$, wobei die a_ν D-konstant mindestens der Ordnung t sind, heiße *D-Operatorenring der Konstanzordnung t über K*. Der Ring aller Operatoren $\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu D^{p^{t-1}\nu}$, wobei die a_ν mindestens D-konstant der Ordnung t sind, heiße *D-Operatorenring der reinen Konstanzordnung t über K*.

Daß die soeben erklärten Bereiche Ringe sind, ist wegen der Iterationsregel (1.3) für Differentiationen klar. Aus derselben Regel folgt die Existenz von Nullteilern in diesen Ringen, z. B. wird das Produkt $D^{p-1} D$ der Nulloperator. Bei D-Operatorenringen mit reiner Konstanzordnung läßt sich nun zeigen, daß jedes Element $A = \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu D^{\nu p^{t-1}}$ des Ringes, für das $a_0 \neq 0$ gilt, ein Inverses $A^{-1} = \sum_{\nu=0}^{p-1} b_\nu D^{\nu p^{t-1}}$ im Ring besitzt.

Definition 15: Das Symbol $(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_c$ $(c \geqq 0$, ganz) werde wie folgt definiert: Man entwickle $(a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots a^{(n)})^c$ formal nach dem Polynomischen Lehrsatz und schreibe anschließend die Exponenten als Indices:

$$(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_c = \sum_{\substack{n \\ \sum c_\nu = c \\ \nu=1}} \frac{c!}{\prod_{\nu=1}^{n} c_\nu!} \prod_{\nu=1}^{n} a_{c_\nu}^{(\nu)}, \; (c < p)\ ^{11}.$$

Das Symbol $(n \dot{\times} a)_c$ sei eine Abkürzung für das n gleiche Summanden enthaltende Symbol $(a \dot{+} a \dot{+} \ldots \dot{+} a)_c$.

Das Symbol $(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_c^{(0)}$ werde als die Summe aller derjenigen Glieder von $(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_c$ definiert, in denen der Index 0 nicht vorkommt:

$$(a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_c^{(0)} = (a^{(1)} \dot{+} a^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} a^{(n)})_c \text{ für } a_0^{(\nu)} = 0, \; \nu = 1, \ldots, n.$$

Hilfssatz 6: Es gilt:

$$\sum_{k=n}^{\nu-1} \binom{\nu}{k} (n \dot{\times} a)_k^{(0)} a_{\nu-k} = ((n+1) \dot{\times} a)_\nu^{(0)}, \; n < \nu < p.$$

Beweis: Aus der Definition von $(n \dot{\times} a)_k$ folgt zunächst

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (n \dot{\times} a)_k \, a_{\nu-k} = ((n+1) \dot{\times} a)_\nu. \tag{9.1}$$

Nun gilt allgemein $(n \dot{\times} a)_k^{(0)} = 0$ für $k < n$, weil dann in jedem Summanden mindestens ein Faktor a_0 vorkommt. Daher folgt aus (9.1) die Behauptung, denn bei Übergang zur (0)-Operation muß man auf der linken Seite von (9.1) auch das Glied mit $k = \nu$ auslassen, weil in ihm a_0 auftritt.

Satz 13: *Es sei*

$$A = \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu D^\nu p^{t-1}$$

ein Element eines Operatorenringes der reinen Konstanzordnung t über einem Körper K mit $a_0 = 1$. Dann ist

$$A^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{k} (-1)^n (n \dot{\times} a)_k^{(0)} D^{kp^{t-1}} \tag{9.2}$$

ein zweiseitiges Inverses von A.

---

[11] Die auftretenden Koeffizienten sind als Polynomialkoeffizienten auch modulo p sinnvoll.

Beweis: Die Zweiseitigkeit ist klar. Es muß gezeigt werden, daß unter Verwendung der Abkürzungen

$$b_0 = 1,\ b_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^n\, (n \diamond a)_\nu^{(0)},\ 0 < \nu < p, \tag{9.3}$$

die Operatorengleichung

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu\, D^{\nu p^t - 1} \sum_{\nu=0}^{p-1} b_\nu\, D^{\nu p^t - 1} = 1$$

gilt. Nun ist vermöge der Iterationsregel (1.3)

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu\, D^{\nu p^t - 1} \sum_{\nu=0}^{p-1} b_\nu\, D^{\nu p^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \sum_{\alpha+\beta=\nu} \binom{\alpha+\beta}{\alpha} a_\alpha\, b_\beta\, D^{(\alpha+\beta) p^t - 1},$$

und dieses ist dann und nur dann der Einheitsoperator, wenn

$$(a \dot{+} b)_\nu = 0 \text{ für } 0 < \nu < p$$

oder

$$b_\nu = -a_\nu - (a\ M\ b)_\nu^{(0)} \text{ für } 0 < \nu < p \tag{9.4}$$

gilt. Unter Verwendung von (9.3) folgt aber:

$$a_\nu + (a \dot{+} b)_\nu^{(0)} = a_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} \binom{\nu}{k} a_{\nu-k} \sum_{n=1}^{k} (-1)^n\, (n \diamond a)_k^{(0)} =$$

$$= a_\nu + \sum_{n=1}^{\nu-1} (-1)^n \sum_{k=n}^{\nu-1} \binom{\nu}{k} a_{\nu-k}\, (n \diamond a)_k^{(0)},$$

und mit Hilfssatz 6:

$$a_\nu + (a \dot{+} b)_\nu^{(0)} = a_\nu + \sum_{n=1}^{\nu-1} (-1)^n\, ((n+1) \diamond a)_\nu^{(0)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^{n-1}\, (n \diamond a)_\nu^{(0)} = -b_\nu,$$

also ist (9.4) und damit der Satz bewiesen.

Satz 14: Eine Differentialgleichung $A\ y = w$ in einem Körper K, wo

$$A = \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu\, D^{\nu p^t - 1},\ a_0 = 1,$$

ein Element des D-Operatorenringes der reinen Konstanzordnung t ist, hat die eindeutige Lösung

$$y = A^{-1}\, w,$$

wobei A^{-1} den in (9.2) definierten Operator bedeutet.

Beweis: Daß $y = A^{-1}\, w$ eine Lösung ist, ist klar. Da aber jede Lösung y von $A\ y = w$ auch $y = A^{-1}\, w$ erfüllen muß und $A^{-1}\, w$ ein eindeutiges Element von K ist, muß die Lösung eindeutig sein.

Da bei dem Beweise $w \neq 0$ nicht vorausgesetzt wurde, folgt, daß homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nur die triviale Lösung $y = 0$ haben, solange $a_0 \neq 0$ ist.

Wenn dagegen bei einem Element $A = \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu D^\nu p^{t-1}$ eines D-Operatorenringes mit einer reinen Konstanzordnung $a_0 = 0$ gilt, existiert kein inverser Operator, aber man kann durch Multiplikation mit einem geeigneten Element A^* des Ringes das Produkt $AA^* = A^*A$ zu dem Vielfachen eines reinen Differentialoperators machen. Zur Konstruktion von A^* muß die in Definition 15 eingeführte Symbolik noch etwas verallgemeinert werden.

Definition 16: Das Symbol $(n \diamond a)_k^{(i)}$, $i + k < p$, $i, k > 0$, werde durch

$$(n \diamond a)_k^{(i)} = (n \diamond a^{(i)})_k^{(0)} \quad \text{mit} \quad a_k^{(i)} = \binom{i+k}{i}^{-1} a_{i+k} \tag{9.5}$$

definiert.

Diese Definition ist sinnvoll, da $\binom{i+k}{i} \neq$ für $0 < i < p - k$.

Satz 15: *Es sei*

$$A = \sum_{\nu=i}^{p-1} a_\nu D^\nu p^{t-1}$$

ein Element eines Operatorenringes der reinen Konstanzordnung t über einem Körper K mit $a_i = 1$, $i \neq 0$, und es werde A^* durch

$$A^* = 1 + \sum_{k=1}^{p-1-i} \sum_{n=1}^{k} (-1)^n (n \diamond a)_k^{(i)} D^k p^{t-1} \tag{9.6}$$

definiert. Dann gilt

$$A^* A = AA^* = D^i p^{t-1}.$$

Beweis: Es muß gezeigt werden, daß unter Verwendung der Abkürzungen

$$b_0 = 1, \; b_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^n (n \diamond a)_\nu^{(i)}, \quad 0 < \nu < p - i, \tag{9.7}$$

die Operatorengleichung

$$\sum_{\nu=i}^{p-1} a_\nu D^\nu p^{t-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-i} b_\nu D^\nu p^{t-1} = D^i p^{t-1}$$

gilt. Nun ist vermöge der Iterationsregel (1.3)

$$\sum_{\nu=0}^{p-1-i} a_{\nu+i} D^{(\nu+i)} p^{t-1} \sum_{\nu=0}^{p-1-i} b_\nu D^\nu p^{t-1} = \sum_{\nu=0}^{p-1-i} \sum_{\alpha+\beta=\nu} a_{\alpha+i} b_\beta \binom{i+\alpha+\beta}{\beta} D^{(\alpha+\beta+i)} p^{t-1}$$

und dieses ist dann und nur dann der reine Differentialoperator $D^{ip^{t-1}}$, wenn

$$\binom{i+\nu}{\nu} b_\nu = -a_{i+\nu} - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{i+\nu}{\mu} a_{i+\nu-\mu} b_\mu, \quad 0 < \nu < p-i, \tag{9.8}$$

gilt, wobei für $\nu = 1$ die Summe auf der rechten Seite leer wird. Es ist zunächst

$$a_{i+\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{i+\nu}{\mu} a_{i+\nu-\mu} b_\mu = a_{i+\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{i+\nu}{\mu} a_{i+\nu-\mu} \sum_{n=1}^{\mu} (-1)^n (n \diamond a)_\mu^{(i)} =$$

$$= a_{i+\nu} + \sum_{n=1}^{\nu-1} (-1)^n \sum_{\mu=n}^{\nu-1} \binom{i+\nu}{\mu} (n \diamond a^{(i)})_\mu^{(0)} a_{i+\nu-\mu}. \tag{9.9}$$

Verwendet man aus der Definition 16 die Beziehung

$$a_{i+\nu-\mu} = \binom{i+\nu-\mu}{i} a_{\nu-\mu}^{(i)}$$

und die Binomialrelation (2.3) in der Form

$$\binom{i+\nu}{\mu} \binom{i+\nu-\mu}{i} = \binom{i+\nu}{i} \binom{\nu}{\mu},$$

so folgt aus (9.9)

$$a_{i+\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \binom{i+\nu}{\mu} a_{i+\nu-\mu} b_\mu = \binom{i+\nu}{i} a_\nu^{(i)} + \binom{i+\nu}{i} \sum_{n=1}^{\nu-1} (-1)^n \sum_{\mu=n}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} (n \diamond a^{(i)})_\mu^{(0)} a_{\nu-\mu}^{(i)}$$

oder mit Hilfssatz 6:

$$= \binom{i+\nu}{i} \left(a_\nu^{(i)} + \sum_{n=1}^{\nu-1} (-1)^n ((n+1) \diamond a)_\nu^{(i)}\right)$$

$$= \binom{i+\nu}{i} \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^{n-1} (n \diamond a)_\nu^{(i)} = -\binom{i+\nu}{i} b_\nu,$$

also ist (9.8) erfüllt.

Satz 16: *Eine Differentialgleichung $A\,y = w$ in einem Körper K, wo*

$$A = \sum_{\nu=i}^{p-1} a_\nu D^\nu p^{t-1}, \quad a_i = 1,$$

ein Element des D-Operatorenringes der reinen Konstanzordnung t über K ist, hat dieselben Lösungen wie die reine Differentialgleichung

$$D^{ip^{t-1}}\, y = A^*\, w,$$

wobei A^* den in (9.6) *definierten Operator bedeutet.*

Beweis: 1. Nach Satz 15 erfüllt jede Lösung y von $Ay = w$ auch $D^{ip^{t-1}}\, y = A^*\, w$. 2. Nach Satz 15 erfüllt jede Lösung y von $D^{ip^{t-1}}\, y = A^* w$ zunächst $A^*\,(Ay - w) = 0$, nach Satz 14 muß dann aber auch $Ay - w = 0$ gelten.

Lineare Differentialgleichungen $A\,y = w$ mit konstanten Koeffizienten, bei denen A keine reine Konstanzordnung hat, lassen sich anscheinend nicht so einfach lösen, weil wohl in einem gewissen Sinne $D, D^p, D^{p^2}, \ldots$ „verschiedene" Differentiationen sind.

Es sei

$$A\,y \equiv \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu D^\nu\, y = w,\ a_k \neq 0,\ k \geqq p, \tag{9.10}$$

eine Differentialgleichung der Konstanzordnung s mit konstanten Koeffizienten in einem Körper K, bei der $A = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu D^\nu$ nicht einem D-Operatorenring von reiner Konstanzordnung angehört. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß für ein ν $\nu \not\equiv 0 \pmod p$ ist (sonst gehört A sogar zu einem D^{p^j}-Operatorenring für ein geeignetes j, und man kann anstelle von D die Differentiation D^{p^j} für die Differentialgleichung verwenden), und wie folgt verfahren:

Wegen Hilfssatz 4 läßt sich A in der Form

$$A = \sum_{\nu=0}^{p^s-1} D^{\nu p}\, A_\nu \tag{9.11}$$

schreiben, wobei die A_ν dem D-Operatorenring der reinen Konstanzordnung 1 angehören. Weiterhin läßt sich die s-te Basisdarstellung eines Elementes y aus K in der Form

$$y = y_0 + x^p\, y_1 + x^{2p}\, y_2 + \ldots + x^{p^s-p}\, y_{p^{s-1}-1} \tag{9.12}$$

schreiben, wobei die y_ν-Polynome in x von einem Grade $< p$ mit Koeffizienten aus K_{D^s} sind. (9.12) möge x^p-adische Entwicklung von y heißen. Dann gilt die Gleichung:

$$D^{\nu p}\, A_\nu\, (x^{\mu p}\, y_\mu) = (A_\nu\, y_\mu)\, (D^{\nu p}\, x^{\mu p}),\ \nu = 0, \ldots, p^{s-1} - 1, \quad \mu = 0, \ldots, p^{s-1} - 1, \tag{9.13}$$

weil für jedes μ $x^{\mu p}$ D-konstant und y_μ D^p-konstant sind. Ist nun

$$w = \sum_{\nu=0}^{p^{s-1}-1} w_\nu\, x^{\nu p}$$

die x^p-adische Entwicklung von w und wird die Lösung der Differentialgleichung (9.10) in der Form (5.2) unbestimmt angesetzt, so folgt aus (9.13):

$$A\,y = \sum_{\nu,\mu=0}^{p^{s-1}} (A_\nu\, y_\nu)\,\binom{\mu}{\nu}\, x^{(\mu-\nu)\,p}$$

oder mit $\mu - \nu = \varrho$

$$A\,y = \sum_{\varrho=0}^{p^{s-1}-1} \Big(\sum_{\mu=\varrho}^{p^{s-1}-1} \binom{\mu}{\varrho}\,(A_{\mu-\varrho}\, y_\mu)\Big)\, x^{\varrho p} = \sum_{\varrho=0}^{p^{s-1}-1} w_\varrho\, x^{\varrho p}.$$

Also ergeben sich aus dem Basissatz die p^{s-1} simultanen Differentialgleichungen für die p^{s-1} Größen $y_0, y_1, \ldots, y_q$:

$$\begin{aligned} A_0\, y_0 + \tbinom{1}{0} A_1\, y_1 + \tbinom{2}{0} A_2\, y_2 + \ldots + \tbinom{q}{0} A_q\, y_q &= w_0, \\ \tbinom{1}{1} A_0\, y_1 + \tbinom{2}{1} A_1\, y_2 + \ldots + \tbinom{q}{1} A_{q-1}\, y_q &= w_1, \\ \tbinom{2}{2} A_0\, y_2 + \ldots + \tbinom{q}{2} A_{q-2}\, y_q &= w_2, \end{aligned} \qquad (9.14)$$

$$\vdots$$

$$\tbinom{q}{q} A_0\, y_q = w_q,$$

wobei abkürzend $p^{s-1} - 1 = q$ gesetzt ist.

Man sieht, daß sich zunächst die allgemeine Lösung (falls überhaupt eine existiert) y_q von $A_0\, y_q = w_q$ nach den alten Methoden bestimmen läßt; etwa auftretende Parameter müssen dann allerdings wegen der Bedingungen für die y_ν als D-konstant von mindestens der Ordnung s angenommen werden. Die übrigen y_ν bekommt man dann sukzessiv aus den Gleichungen (9.14). Wenn auch nur bei einem dieser Schritte die zugehörige Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist, hat die Differentialgleichung (9.10) keine Lösung.

Literatur.

[1] *H. Hasse:* Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beilebiger Charakteristik, *J. reine angew. Math.* 175 (1936).

[2] *H. Hasse* und *F. K. Schmidt:* Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, *J. reine angew. Math.* 177 (1937).

[3] *Deuring:* Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen, Berlin, Springer (in Vorbereitung).

[4] *Jaeger:* Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik, *J. reine angew. Math.* 190 (1952).

[5] *v. d. Waerden:* Moderne Algebra, Band II, 2. Aufl., Berlin, Springer, 1940.

Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Maßzahlen bei konvexen Rotationskörpern.

Von

H. Hadwiger, Bern.

(Eingelangt am 14. Jänner 1952.)

Mit 3 Abbildungen.

Es sei $k \geqq 2$ und es sollen W_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$ die $k+1$ *Minkowski*schen Quermaßintegrale eines konvexen Rotationskörpers des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen[1]. Mit der vorliegenden Note gebe ich eine einfache Herleitung der Ungleichung

$$W_\alpha^{\beta-\gamma}\, W_\beta^{\gamma-\alpha}\, W_\gamma^{\alpha-\beta} \geqq 1 \qquad (0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq k). \tag{1}$$

Diese erfaßt drei beliebig gewählte Quermaßintegrale, die nach aufsteigenden Indizes geordnet in die Ungleichheitsrelation eingehen. Man beachte insbesondere den einfachen zyklischen Aufbau der Formel.

In (1) gilt das Gleichheitszeichen für die Kugel und, wenn $\gamma < k$ ist, allgemeiner für einen rotationssymmetrischen Kappenkörper der Kugel.

Es zeigt sich, daß (1) viele bekannte Ungleichungen der Maßgeometrie konvexer Rotationskörper als Spezialfälle enthält, insbesondere solche, die durch die *Brunn-Minkowski*sche Theorie hervorgebracht wurden.

Setzen wir beispielsweise $\alpha = \nu - 1$, $\beta = \nu$, $\gamma = \nu + 1$, so ergeben sich die Ungleichungen von *W. Fenchel*[2], nämlich

$$W_\nu^2 \geqq W_{\nu-1}\, W_{\nu+1} \qquad (1 \leqq \nu \leqq k-1). \tag{2}$$

Für $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = k$ resultiert die klassische isoperimetrische Ungleichung

$$W_1^k \geqq W_k\, W_0^{k-1}, \tag{3}$$

---

[1] Vgl. *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, 7 (32), S. 48—50.

[2] *W. Fenchel*, Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes. C. R. Acad. sc. Paris 203, 1936, S. 647.

wobei beachtet werden muß, daß $kW_1 = F$ (Oberfläche), $W_0 = V$ (Volumen) und $W_k = \omega_k =$ Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel gilt.

Im Falle des gewöhnlichen Raumes, d. h. für $k = 3$, ergeben sich den vier möglichen Indizeskombinationen entsprechend die vier Ungleichungen von *H. Minkowski*, nämlich

α	β	γ	
0	1	2	$F^2 \geqq 3MV$
0	1	3	$F^3 \geqq 36\pi V^2$
0	2	3	$M^3 \geqq 48\pi^2 V$
1	2	3	$M^2 \geqq 4\pi F,$

(4)

wobei die Quermaßintegrale durch die vier Maßzahlen V (Volumen), F (Oberfläche) und M (Integral der mittleren Krümmung) nach dem bekannten Schlüssel $W_0 = V$, $3W_1 = F$, $3W_2 = M$, $3W_3 = 4\pi$ ersetzt wurden.

II.

Unsere Ungleichung (1) wird sich als Folgerung einer schärferen linearen Ungleichung

$$(\alpha - \beta)\, a^\gamma W_\gamma + (\beta - \gamma)\, a^\alpha W_\alpha + (\gamma - \alpha)\, a^\beta W_\beta \geqq 0$$
$$(0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq k) \tag{5}$$

ergeben, die ebenfalls einen zyklischen Aufbau zeigt. Hier bedeutet a den Äquatorradius des Rotationskörpers, d. h. den Radius einer größten $(k-1)$-dimensionalen Kugel, die durch eine auf der Rotationsachse orthogonal stehende „Ebene" aus dem Körper ausgeschnitten wird.

In (5) gilt das Gleichheitszeichen für den Kugelzylinder und, wenn $\gamma < k$ ist, allgemeiner für einen rotationssymmetrischen Kappenkörper des Kugelzylinders.

In (5) sind insbesondere die von *A. Dinghas*[3] gefundenen Verschärfungen der Ungleichungen (2) von *W. Fenchel* enthalten. Ferner ist auch die lineare isoperimetrische Ungleichung von *E. Schmidt*[4] als

[3] *A. Dinghas*, Konvexe Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss. 1939. Math.-naturw. Kl. Nr. 17. Die Fenchelschen Ungleichungen gelten für beliebige konvexe Körper. Hier handelt es sich um Verschärfungen bei Beschränkung auf rotationssymmetrische Körper.

[4] *E. Schmidt*, Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. Math. Zeitschr. **44**, 1939, S. 689—788.

Spezialfall darstellbar. Im Falle des gewöhnlichen Raumes, d. h. für $k = 3$, ergeben sich die bekannten von *T. Bonnesen*, *A. Dinghas* und *E. Schmidt* herrührenden Verschärfungen der Ungleichungen (4) von *H. Minkowski*.

Von *A. Dinghas*[5] ist kürzlich eine für die Maßgeometrie konvexer Rotationskörper fruchtbare Theorie entwickelt worden, welche es gestattet, gewisse Klassen von linearen Ungleichungen mühelos zu gewinnen. Auch (5) ist in einer solchen Klasse enthalten[6], blieb jedoch m. W. als besonderer beachtenswerter Spezialfall unbemerkt. Es scheint mir durchaus lohnend, die Ungleichung (5) auf eine unabhängige und direkte Weise herzuleiten.

Die Methode von *A. Dinghas* beruht darauf, daß man ausgehend von gewissen neuen Integraldarstellungen für die Quermaßintegrale durch geeignete Linearkombination definite Ausdrücke gewinnt.

Der hier vorgetragene Nachweis der Ungleichung (5) vollzieht sich nach der gleichen Methode. Jedoch ergibt sich eine nicht unbedeutende Entlastung dadurch, daß das Bestehen von (5) zunächst nur für polygonale konvexe Rotationskörper gezeigt wird[7]. Bei dieser Beschränkung erhalten die fraglichen Integraldarstellungen für die Quermaßintegrale einen durchaus elementaren Charakter. Erst nachdem die Gültigkeit der Ungleichung für diese erwähnten elementaren Körper festgestellt ist, ergibt sich ihre allgemeinere Geltung auf Grund der Bemerkungen, daß die Quermaßintegrale stetige Funktionale sind, und daß sich ein beliebiger konvexer Rotationskörper beliebig genau durch polygonale Rotationskörper approximieren läßt.

Wird dieser Weg beschritten, so ergibt sich ein bis auf den letzterwähnten Approximationsvorgang durchaus elementar gestalteter Zugang zu allen einschlägigen Ungleichungen der Theorie der konvexen Rotationskörper.

III.

Ein polygonaler Rotationskörper sei ein solcher, der sich durch $(k-1)$-dimensionale orthogonal zur Rotationsachse geführte Schnitte in endlich viele Zylinder-, Kegelstumpf- oder Kegelkörper zerlegen läßt. Es sei P ein polygonaler Rotationskörper, der insbesondere keinen

---

[5] *A. Dinghas*, Zur Theorie der konvexen Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Math. Nachr. 2, 1949, 124—140.

[6] Vgl. Satz III (S. 126) der Abhandlung von *A. Dinghas*.

[7] Die genauere Erklärung hierzu findet sich im folgenden Abschnitt III.

Zylinderkörper enthält. Eine 2-dimensionale Ebene durch die Rotationsachse schneidet aus P einen symmetrischen polygonalen Bereich

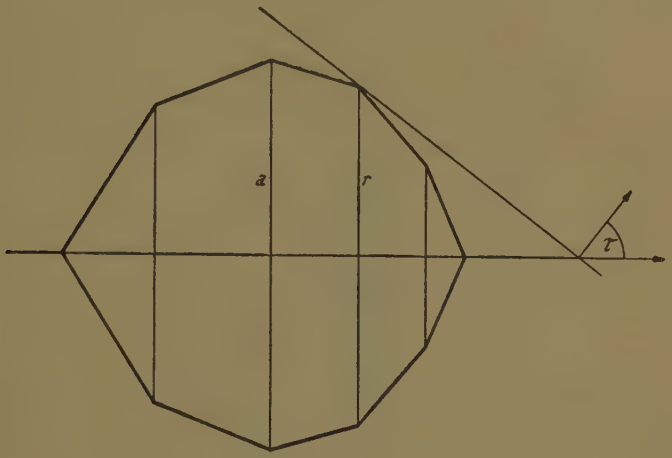

Abb 1.

aus (vgl. Abb. 1). Abgesehen von endlich vielen Lagen hat eine Stützebene an P nur einen Berührungspunkt mit P gemeinsam. Seinen Abstand von der Rotationsachse wollen wir Berührungsradius nennen und ihn mit r bezeichnen. Die Lage einer Stützebene sei durch den Winkel τ zwischen der orientierten Rotationsachse und der nach außen gerichteten Stützebenennormalen fixiert. Setzen wir fest, daß der Berührungsradius r eine von rechts stetige Funktion von τ ist, so wird damit $r = r(\tau)$ eine für alle $0 \leqq \tau < \pi$ definierte, stückweise konstante und von rechts stetige Funktion (vgl. Abb. 1). Insbesondere ist dann der Äquatorradius a durch $a = r(\pi/2)$ gegeben.

In diesem Abschnitt skizzieren wir die Herleitung der für die Quermaßintegrale von P gültigen Integraldarstellungen

$$W_\nu = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^\pi [a^{k-\nu} - r^{k-\nu} \sin^\nu \tau] \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, k), \quad (6)$$

wobei ω_{k-1} das Volumen der $(k-1)$-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Diese Integralformeln sind mit den Darstellungen von *A. Dinghas* eng verwandt; sie sind jedoch etwas einfacher und weisen keine additiv hinzutretenden Konstanten auf.

Es sei nun zunächst S ein eingliedriger polygonaler Rotationskörper, also ein Kegelstumpfkörper mit den beiden Radien p, q $(q > p)$ und

dem Neigungswinkel φ, der als Winkel zwischen der orientierten Rotationsachse und der nach außen gerichteten Mantelnormalen definiert

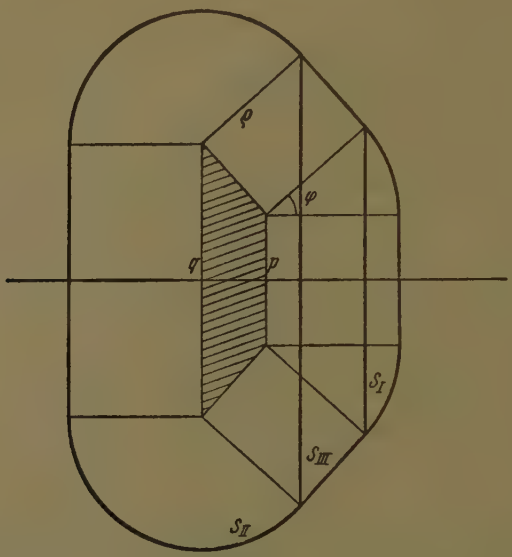

Abb. 2.

sei (vgl. Abb. 2). Es bedeute nun S_ϱ den äußeren Parallelkörper von S im Abstand ϱ und V_ϱ dessen Volumen. Zur Berechnung von V_ϱ zerlegen wir S_ϱ in drei Teilkörper S_{I}, S_{II} und S_{III} (vgl. Abb. 2) und gewinnen für die entsprechenden Volumina die folgenden Darstellungen

$$V_{\mathrm{I}} = \omega_{k-1} \int_0^{\varphi} (p + \varrho \sin\tau)^{k-1} \varrho \sin\tau \, d\tau; \tag{7}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \omega_{k-1} \int_{\varphi}^{\pi} (q + \varrho \sin\tau)^{k-1} \varrho \sin\tau \, d\tau; \tag{8}$$

$$V_{\mathrm{III}} = \frac{\omega_{k-1}}{k} [(q + \varrho \sin\varphi)^k - (p + \varrho \sin\varphi)^k] \operatorname{tg}\varphi. \tag{9}$$

Werden die ersten beiden Integrale gemäß der Einsätze

$$U' = (p + \varrho \sin\tau)^{k-1} \varrho \cos\tau; \; U = \frac{1}{k}(p + \varrho \sin\tau)^k,$$

$$V = \operatorname{tg}\tau; \; V' = \frac{1}{\cos^2\tau}, \tag{10}$$

partiell behandelt, so resultieren die folgenden Ausdrücke

$$V_{\mathrm{I}} = \frac{\omega_{k-1}}{k} (p + \varrho \sin\varphi)^k \operatorname{tg}\varphi + X; \tag{11}$$

$$V_{\mathrm{II}} = -\frac{\omega_{k-1}}{k} (q + \varrho \sin\varphi)^k \operatorname{tg}\varphi + Y + Z, \tag{12}$$

wobei zur Abkürzung

$$X = -\frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^{\varphi} (p + \varrho \sin\tau)^k \frac{d\tau}{\cos^2\tau}; \tag{13}$$

$$Y = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_{\varphi}^{\pi} [(q + \varrho)^k - (q + \varrho \sin\tau)^k] \frac{d\tau}{\cos\tau^2}; \tag{14}$$

$$Z = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^{\varphi} (q + \varrho)^k \frac{d\tau}{\cos^2\tau} \tag{15}$$

gesetzt wurde. Bei der Behandlung des zweiten Integrals muß dieses in die beiden Teilintegrale, die sich von φ bis $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ und von $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ bis π erstrecken, zerlegt werden, und nach der partiellen Integration ist der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zu vollziehen.

Nun ergibt sich für das gesuchte Parallelvolumen

$$V_\varrho = V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} + V_{\mathrm{III}} = X + Y + Z \tag{16}$$

oder, wie man jetzt leicht bestätigt,

$$V_\varrho = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^{\pi} [(a + \varrho)^k - (r + \varrho \sin\tau)^k] \frac{d\tau}{\cos^2\tau}, \tag{17}$$

wenn man bedenkt, daß für den betrachteten Kegelstumpf S der Äquatorradius $a = q$ ist, und daß der Berührungsradius durch $r = p$ $(0 \leqq \tau < \varphi)$ und $r = q$ $(\varphi \leqq \tau < \pi)$ gegeben wird.

Es sei nun P ein n-gliedriger konvexer polygonaler Rotationskörper ohne Zylindersegment. Es bezeichne $V_\varrho = V_\varrho(P)$ das Volumen des äußeren Parallelkörpers P_ϱ von P im Abstand ϱ, und weiter sei $J_\varrho = J_\varrho(P)$ der Wert des auf der rechten Seite von (17) stehenden Integrals. Für $n = 1$ wird durch (17) festgestellt, daß $V_\varrho(P) = J_\varrho(P)$ gilt. Durch vollständige Induktion kann dies nun für beliebiges $n \geqq 1$ geschlossen werden. Dies geschieht auf Grund der folgenden Bemerkungen: Sind P und Q zwei konvexe polygonale Rotationskörper, die dadurch entstehen, daß man einen ebensolchen Körper R durch einen orthogonal zur Rotationsachse geführten Schnitt in zwei Teilkörper

zerlegt, symbolisch durch $R = P + Q$ ausgedrückt, so gilt für das Parallelvolumen $V_\varrho(P)$ bekanntlich das Additionstheorem

$$V_\varrho(P+Q) + V_\varrho(PQ) = V_\varrho(P) + V_\varrho(Q), \tag{18}$$

wobei PQ den $(k-1)$-dimensionalen Durchschnittskörper von P und Q bezeichnet, der hier als entarteter polygonaler Rotationskörper aufgefaßt werden soll. Durch einige passende Integralzerlegungen bestätigt man, daß auch das Integralfunktional $J_\varrho(P)$ das analoge Additionstheorem

$$J_\varrho(P+Q) + J_\varrho(PQ) = J_\varrho(P) + J_\varrho(Q) \tag{19}$$

erfüllt. Nun gilt $V_\varrho(PQ) = J_\varrho(PQ)$, da ja PQ eingliedrig ist. Nehmen wir an, daß weiter bereits bekannt sei, daß $V_\varrho(P) = J_\varrho(P)$ und ebenso $V_\varrho(Q) = J_\varrho(Q)$ sei, so folgt mit (18) und (19), daß auch $V_\varrho(R) = J_\varrho(R)$ gilt; damit ist die induktive Schlußweise im wesentlichen festgelegt.

Damit ist gezeigt, daß die Integralformel (17) für das Parallelvolumen bei beliebigen konvexen polygonalen Rotationskörpern gültig ist.

Nun läßt sich andererseits nach einer bekannten auf *J. Steiner* zurückgehenden Formel das Parallelvolumen durch die Minkowskischen Quermaßintegrale wie folgt ausdrücken: Es gilt

$$V_\varrho = \sum_0^k \binom{k}{\nu} W_\nu \varrho^\nu. \tag{20}$$

Entwickeln wir jetzt den Integralausdruck in (17) nach den Potenzen von ϱ, so gewinnt man durch Vergleich mit (20) die zu beweisende Integraldarstellung (6).

IV.

In diesem Abschnitt treten wir nun auf den Nachweis der linearen Ungleichung (5) ein. Der fragliche Ausdruck ist

$$\Delta = (\alpha - \beta)\, a^\gamma W_\gamma + (\beta - \gamma)\, a^\alpha W_\alpha + (\gamma - \alpha)\, a^\beta W_\beta, \tag{21}$$

in dem wir jetzt die Quermaßintegrale durch die Darstellungen (6) ersetzen. Mit passender Zusammenfassung läßt sich dann

$$\Delta = -\frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^\pi r^k H\left(\frac{a \sin\tau}{r}\right) \frac{d\tau}{\cos^2\tau} \tag{22}$$

schreiben, wenn wir als Hilfsfunktion

$$H(X) = (\alpha - \beta)\, X^\gamma + (\beta - \gamma)\, X^\alpha + (\gamma - \alpha)\, X^\beta \tag{23}$$

einführen. Wie eine elementare Diskussion lehrt, gilt

$$H(X) \leqq 0 \quad [0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq k;\ X \geqq 0]. \tag{24}$$

Damit ergibt sich $\Delta \geqq 0$, wodurch (5) bewiesen ist. Unsere Betrachtungen haben indessen nur für polygonale Rotationskörper Gültigkeit. Wie am Ende von Abschnitt II bereits erörtert, folgt aber die Richtigkeit von (5) für beliebige konvexe Rotationskörper durch Grenzübergang bei Approximation durch Körper der von uns betrachteten elementaren Klasse.

Wir erwähnen noch, daß der Integralausdruck (22) formal dann verschwindet, wenn entweder $r = a \sin \tau$ oder aber auch, wenn $r = 0$ und $\gamma < k$ ist.

V.

Nun wollen wir noch zeigen, wie die Ungleichung (1) aus der soeben bewiesenen linearen Ungleichung (5) gefolgert werden kann. Nach (5) läßt sich auf

$$W_\beta \geqq \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} W_\gamma a^{\gamma-\beta} + \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} W_\alpha a^{-(\beta-\alpha)} \tag{25}$$

schließen. Den rechts stehenden Ausdruck wollen wir nun als Funktion von a betrachten, und feststellen, daß diese bei

$$a_0 = \left(\frac{W_\alpha}{W_\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}} \tag{26}$$

für positive a ihr Minimum annimmt. Der in (25) rechtsstehende Funktionswert ist demnach nicht kleiner als dieses Minimum, und so erzielt man die Ungleichung

$$W_\beta \geqq W_\alpha^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} W_\gamma^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \tag{27}$$

welche mit der zu beweisenden Relation (1) gleichwertig ist.

VI.

Abschließend sind noch die Behauptungen betreffend die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in den Ungleichungen (1) und (5) zu verifizieren. Es genügt, die Minkowskischen Quermaßintegrale für den rotationssymmetrischen Kappenkörper des Kugelzylinders (vgl. Abb. 3) zu kennen. Sind h die Länge des zylindrischen Teilkörpers, a der Äquatorradius und ξ und η die (halben) Öffnungswinkel der rechts und links angesetzten Kegelkappen, so ist

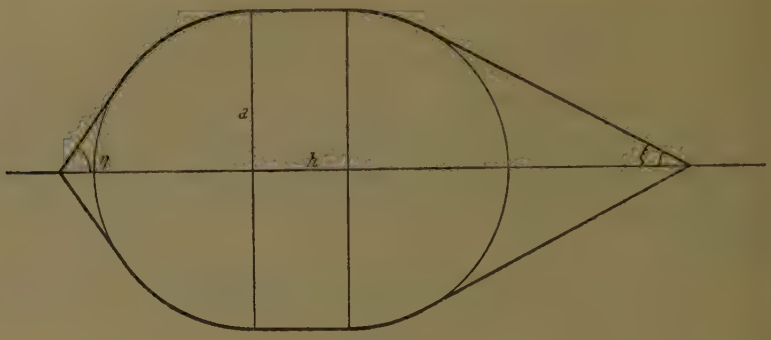

Abb. 3.

$$W_k = \omega_k \tag{28}$$

und, falls $\nu < k$,

$$W_\nu = [\omega_k + I_k(\tfrac{\pi}{2} - \xi) + I_k(\tfrac{\pi}{2} - \eta)]\, a^{k-\nu} + \frac{\omega_{k-1}}{k}(k-\nu)\, h\, a^{k-\nu-1} \tag{29}$$

wobei die Hilfsgröße

$$I_k(\varphi) = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^\varphi \frac{\sin^k \tau}{\cos^2 \tau}\, d\tau \tag{30}$$

verwendet werden muß. Ist $\gamma < k$, so gelten für alle beteiligten Quermaßintegrale in (5) die Formeln (29), so daß, wie man mühelos ausrechnet, das Gleichheitszeichen für diese allgemeinsten Körper gilt. Ist aber $\gamma = k$, so bewirkt die leicht ersichtliche formale Anomalie zwischen (28) und (29), daß das Gleichheitszeichen nur noch im Falle $\xi = \pi/2$ und $\eta = \pi/2$, also nur noch für die Kugelzylinder, in Betracht kommt. Der Kappenkörper der Kugel ergibt sich dadurch, daß man $h = 0$ setzt. Analog ergibt sich jetzt, daß das Gleichheitszeichen in Ungleichung (1) für diesen Körper dann gilt, wenn $\gamma < k$ ausfällt; ist dagegen $\gamma = k$, so trifft dies nur noch für die Kugel zu, wo wieder $\xi = \pi/2$ und $\eta = \pi/2$ ist.

Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy und Ramanujan auf algebraische Zahlkörper.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 8. Februar 1952.)

1.

Hardy und *Ramanujan* haben folgenden Satz bewiesen: Sei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der natürlichen Zahl n, die $\neq 1$ sind. Dann ist die normale Größenordnung von $\omega(n)$ gleich loglog n. Genauer zeigten sie: Es ist

$$|\omega(n) - \text{loglog}\, n| > (\text{loglog}\, n)^{1/2+\delta},\ \delta > 0 \text{ beliebig},$$

für höchstens $o(x)$ natürliche Zahlen $n \leqq x$.

In dieser Arbeit verallgemeinern wir diesen Satz auf die Ideale eines algebraischen Zahlkörpers K vom Grade k über dem Körper der rationalen Zahlen. Der Beweis schließt sich an den *Turan*'schen Beweis des *Hardy-Ramanujan*'schen Satzes an[1]. Weiters werden die Abschätzungen für Primideale benützt, die von *Landau*[2] angegeben wurden. Der zu beweisende Satz lautet dann folgendermaßen:

Satz: Sei $\omega(\mathfrak{a})$ *die Anzahl der verschiedenen Primideale* $\neq (1)$ *aus* K, *die im Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* K *aufgehen. mit* $N\mathfrak{a}$ *sei die Norm von* $\mathfrak{a}$ *bezeichnet. Dann ist die Anzahl der* $\mathfrak{a}$ *mit* $N\mathfrak{a} \leqq x$ *und*

$$|\omega(\mathfrak{a}) - \text{loglog}\, N\mathfrak{a}| > (\text{loglog}\, N\mathfrak{a})^{1/2+\delta},\ \delta > 0 \text{ beliebig}, \qquad (1)$$

ein $o(x)$. *Insbesondere ist also die normale Größenordnung von* $\omega(\mathfrak{a})$ *gleich* loglog $N\mathfrak{a}$.

2.

Wir schicken dem Beweis des Satzes einen Hilfssatz voraus. Es sei

$$\alpha = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2} R\, h}{w\,|\sqrt{D}\,|},$$

[1] Vgl. z. B. *Hardy-Wright*, Theory of numbers, Oxford 1938, S. 357.

[2] *Landau*, Über die Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers, Journal f. d. reine und angew. Math., Bd. **125**, S. 63. Wir zitieren diese Arbeit mit *Landau* und Angabe der Seitenzahl.

wobei r_1, r_2 die Anzahl der reellen, bzw. konjugiert komplexen Konjugierten von K, R den Regulator, h die Klassenzahl, D die Diskriminante und w die Anzahl der Einheitswurzel von K bedeuten. Ferner sei

$$H(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} 1$$

Dann gilt die *Weber*'sche Abschätzung (*Landau*, S. 81)

$$H(x) = \alpha x + 0(x^{1-\lambda}) \tag{2}$$

wo $\lambda = 1/k$ gesetzt wurde. Wir zeigen nun den

Hilfssatz: Es ist

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \omega(\mathfrak{a}) = \alpha x \operatorname{loglog} x + B x + 0(x/\log x), \tag{3}$$

wo B eine Konstante bedeutet[3].

Beweis: Es ist

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \omega(\mathfrak{a}) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \sum_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a},\, N\mathfrak{a} \leqq x} 1 = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right), \tag{3'}$$

wo $\mathfrak{p}$ zur Bezeichnung der Primideale verwendet wird. Nach (2) ist

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right) = \alpha x \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} + 0\left(x^{1-\lambda} \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{1}{(N\mathfrak{p})^{1-\lambda}}\right) \tag{4}$$

Die letztere Summe wird nun abgeschätzt. Durch partielle Summation ergibt sich unter Benützung der Beziehung (*Landau*, S. 150)

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \operatorname{loglog} x + D + 0\left(\frac{1}{\log x}\right), \; D \text{ Konstante}, \tag{5}$$

folgendes

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{1}{(N\mathfrak{p})^{1-\lambda}} = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{(N\mathfrak{p})^{\lambda}}{N\mathfrak{p}} =$$

$$= x^{\lambda}\left(\operatorname{loglog} x + D + 0\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) - \int_2^x \frac{d\,\xi^{\lambda}}{d\,\xi} \left(\sum_{N\mathfrak{p} \leqq \xi} \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) d\,\xi,$$

$$\int_2^x \frac{d\,\xi^{\lambda}}{d\,\xi} \left(\sum_{N\mathfrak{p} \leqq \xi} \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) d\,\xi = \int_2^x \frac{d\,\xi^{\lambda}}{d\,\xi} \left(\operatorname{loglog} \xi + D + 0\left(\frac{1}{\log \xi}\right)\right) d\,\xi =$$

$$= x^{\lambda} \operatorname{loglog} x + D\, x^{\lambda} + 0(x^{\lambda}/\log x).$$

Das letztere folgt durch partielle Integration.

Insgesamt wird also

---

[3] Alle Konstanten hängen, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, nur vom Körper K ab.

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x} \frac{1}{(N\mathfrak{p})^{1-\lambda}} = 0\left(\frac{x^{\lambda}}{\log x}\right) \tag{6}$$

und schließlich folgt daraus nach (4), (5), (3′) die Behauptung des Hilfssatzes.

3.

Beweis des Satzes: Es genügt zu zeigen: Es gibt nur $o(x)$ Ideale $\mathfrak{a}$ mit $N\mathfrak{a} \leqq x$ und

$$|\omega(\mathfrak{a}) - \log\log x| > (\log\log x)^{1/2+\delta},\ \delta > 0 \text{ beliebig.} \tag{1′}$$

Denn im Bereich $x^{1/e} \leqq N\mathfrak{a} \leqq x$ ist $\log\log x - 1 \leqq \log\log N\mathfrak{a} \leqq \log\log x$ und die Anzahl der $\mathfrak{a}$ mit $x^{1/e} \geqq N\mathfrak{a}$ ist

$$H(x^{1/e}) = \alpha\, x^{1/e} + 0\,(x^{(1-\lambda)/e}) = o(x)$$

nach (2). Wir setzen

$$T = \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \{\omega(\mathfrak{a})\}^2.$$

Es ist

$$T = \sum_{N\mathfrak{a}\leqq x} \sum_{\mathfrak{p}_1/\mathfrak{a},\, \mathfrak{p}_2/\mathfrak{a}} 1\ . \tag{7}$$

$\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ durchlaufen unabhängig voneinander die Primteiler von $\mathfrak{a}$. Wir greifen zwei feste Primteiler $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ heraus und bestimmen ihren Beitrag zur Anzahl T. Wenn $i = j$ beträgt dieser

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x/N\mathfrak{p}_i} 1 = H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_i}\right). \tag{8}$$

Wenn $i \neq j$, beträgt er $H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j}\right)$. Daher ist

$$T = \sum_i H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_i}\right) + \sum_{i\neq j} H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j}\right) \tag{9}$$

wo in der letzten Summe i, j unabhängig voneinander sind. Nach dem Hilfssatz ist

$$\sum_i H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_i}\right) = \alpha\, x \log\log x + 0\,(x) = 0\,(x \log\log x) \tag{10}$$

und weiter unter Benützung von (2)

$$\sum_{i\neq j} H\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j}\right) = \alpha\, x \sum_{i\neq j} \frac{1}{N\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j} + 0\,(x^{1-\lambda} \sum_{i\neq j} \frac{1}{(N\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j)^{1-\lambda}}),$$

$$\text{wo } N\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j \leqq x \text{ ist.} \tag{11}$$

Wir zeigen nun

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{N \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j} = (\log\log x)^2 + 0(\log\log x). \tag{12}$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{(N\mathfrak{p})^2}$ kann man die Bedingung $i \neq j$ fallen lassen. Es wird

$$(\sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{p}})^2 < \sum_{N\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j} < (\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}})^2$$

und die beiden Schranken sind nach (5) beide von der Größenordnung $(\log\log x)^2 + 0(\log\log x)$. Nun schätzen wir den zweiten Summanden in (11) ab. Es ist

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{(N \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j)^{1-\lambda}} < \sum_{N\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j \leqq x} \frac{1}{(N \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j)^{1-\lambda}} < 2 \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^{1-\lambda}}.$$

Nun ist

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^{1-\lambda}} = 0(x^{\lambda}).$$

Dies kann man aus der Beziehung (*Landau*, S. 81)

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{a}} = \alpha \log x + \beta + 0(x^{-\lambda}, \beta \text{ Konstante},$$

wie oben beim Beweis von (6) durch partielle Summation einsehen. Es ergibt sich also, daß das Restglied in (11) die Größenordnung $0(x)$ hat. Insgesamt ist

$$\sum_{i \neq j} H(\frac{x}{N \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_j}) = \alpha\, x (\log\log x)^2 + 0(x \log\log x)$$

und

$$T = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \{\omega(\mathfrak{a})\}^2 = \alpha\, x (\log\log x)^2 + 0(x \log\log x)$$

Daraus folgt mit Hilfe von (3), (2)

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \{\omega(\mathfrak{a}) - \log\log x\}^2 =$$
$$= T - 2\log\log x(\alpha x \log\log x + 0(x)) + (\log\log x)^2 H(x) = 0(x \log\log x) \tag{13}$$

Wenn es mehr als $\eta\, x$ Ideale $\mathfrak{a}$ mit $N\mathfrak{a} \leqq x$ gäbe, für die (1′) erfüllt wäre, dann hätte man

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x} \{\omega(\mathfrak{a}) - \log\log x\}^2 \geqq \eta\, x (\log\log x)^{1+2\delta}$$

was ein Widerspruch zu (13) ist, für große x. Daher ist die Anzahl der $\mathfrak{a}$ mit $N\mathfrak{a} \leqq x$, die (1) erfüllen, von der Ordnung $0(x)$, womit alles bewiesen ist.

Über die Anzahl der Gitterpunkte in einem Tetraeder.

Von

Gustav Lochs, Innsbruck.

(Eingelangt am 18. Februar 1952.)

§ 1. Ziel dieser Zeilen ist eine Verbesserung der Abschätzungsformeln für die Anzahl $n = n(x; \alpha_1, \ldots \alpha_k)$ der ganzzahligen, nichtnegativen Lösungen $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ der Ungleichung $0 \leqq x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_k\alpha_k \leqq x$ bei gegebenen, positiven $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, x$. Solche Abschätzungen wurden von *D. H. Lehmer*, Duke Math. Journ. **7**, 341—353 und von mir, Jahresb. d. Deutsch. Math. Vereinigung **54**, 41—51 gegeben.

Hier sollen nun die Formeln (5″), (8), (II), (16), (III) der letztgenannten Arbeit dazu verwendet werden, eine im allgemeinen bessere Abschätzung zu erhalten. Diese Formeln heißen für $k > 1$ unter Benützung der Abkürzung $A = k!\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_k$ im wesentlichen:

$$An < 2^{-k}(2x+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)^k - {}^1/_{24}k(k-1)\,x^{k-2}(\alpha_3^2+\ldots+\alpha_k^2) \quad (1)$$

$$An > x^k + {}^1/_2 k\,x^{k-1}(\alpha_2+\ldots+\alpha_k) + {}^1/_4 k(k-1)\,x^{k-2} \sum_{i>j>1} \alpha_i\alpha_j \quad (2)$$

$$\Delta = -\Sigma\,\Theta\left[\frac{1}{\alpha_1}(x - g_2\alpha_2 - \ldots - g_k\alpha_k)\right] \quad (3)$$

(worin $\Theta(u) = u - [u] - {}^1/_2$ ist und die Summation sich über alle Systeme von nichtnegativen, ganzen g_i erstreckt, die der Ungleichung $0 \leqq g_2\alpha_2 + \ldots + g_k\alpha_k \leqq x$ genügen),

$$A.n < 2^{-k}(2x+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)^k - {}^1/_{24}k(k-1)\,x^{k-2}(\alpha_3^2+\ldots+\alpha_k^2) + A\Delta \quad (4)$$

$$A.n > x^k + {}^1/_2 k\,x^{k-1}(\alpha_1+\ldots+\alpha_k) + {}^1/_4 k(k-1)\,x^{k-2}\left(\sum_{i>j} \alpha_i\alpha_j - \alpha_1\alpha_2\right) + A\Delta \quad (5)$$

Die Formeln (1) und (2) unterscheiden sich bereits in den Koeffizienten von x^{k-1}. Die Abschätzungen von *Lehmer* unterscheiden sich von (1) und (2) erst in den Koeffizienten von x^{k-2}, x^{k-3} usw.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man Δ so abschätzen kann, daß (4) und (5) Formeln ergeben, in denen die Koeffizienten von x^{k-1} im allgemeinen günstiger sind als in (1) und (2) (Formel (22)).

§ 2. Das links abgeschlossene, rechts offene Intervall $[-1/2, 1/2)$ heiße I. Die Funktion $\Theta(u)$ hat folgende Eigenschaften (6) bis (9):

$$\Theta(u) \text{ liegt im Intervall } I. \tag{6}$$

$$\Theta(-u) = -\Theta(u) \text{ falls } \Theta(u) > -1/2 \tag{7}$$

$$\Theta(-u) = -1 - \Theta(u) \text{ falls } \Theta(u) = -1/2.$$

$$\Theta(u) \text{ hat die Periode 1.} \tag{8}$$

Für $-1 < v < 1$ ist $\Theta(u+v)$ derjenige der Werte $\Theta(u)+v$, $\Theta(u)+v+1$, $\Theta(u)+v-1$, der in I liegt. (9)

Den Prozeß der Ersetzung von $\Theta(u)$ durch $\Theta(u+v)$ wollen wir Verschiebung um v nennen.

§ 3. i und j mögen im folgenden die s Zahlen $0, 1, \ldots s-1$ durchlaufen. Die a_i seien irgendwelche reelle Zahlen und es sei $z_i = 1/2 - \Theta(a_i)$, so daß $\Theta(z_i+a_i) = -1/2$ ist. Die Summe $T(u) = \sum_i \Theta(u+a_i)$ kann ihre obere Grenze G für kein u erreichen; denn alle ihre Summanden können durch kleine Vergrößerung von u vergrößert werden. G ist vielmehr gleich dem Maximum der Zahlen $m_i + T(z_i)$, worin m_i die Anzahl der a_j bedeutet, für die $\Theta(a_j) = \Theta(a_i)$ ist. Zur Berechnung von G denken wir uns die a_i so numeriert, daß $\Theta(a_i) \leqq \Theta(a_{i+1})$ ist. Für ein bestimmtes j sei r die größte der Zahlen i, für die $\Theta(a_i) = \Theta(a_j)$ ist. Dann ist

$$T(z_j)+m_j = T(0)+sz_j-(s-(r-m_r+1))+m_r = T(0)-sz_r-s+r+1 =$$
$$= T(0)-1/2\,s+1+r-s\Theta(a_r).$$

Weil $r - s\,\Theta(a_r) \geqq j - s\,\Theta(a_j)$ ist, braucht man also nur die Differenzen $i - s\,\Theta(a_i)$ für alle i zu berechnen und findet als obere Grenze aller $T(u)$

$$G = T(0) + \mathrm{Max}\,[i - s\,\Theta(a_i)] - \frac{s}{2} + 1. \tag{10}$$

Die untere Grenze g der $T(u)$ wird erreicht. Sie ist das Minimum der Zahlen $T(z_i)$ und wird, falls die Numerierung so ist, daß $\Theta(a_i) \leqq \Theta(a_{i+1})$ ist, durch die Formel

$$g = T(0) + \mathrm{Min}\,[i - s\,\Theta(a_i)] - \frac{s}{2} \tag{11}$$

dargestellt.

Stets ist $G \geqq 1/2$, $g \leqq -1/2$. Denn sei $\mathrm{Min}\,[i - s\,\Theta(a_i)] = h$, so ist

$$\Theta(a_i) \leqq \frac{1}{s}(i-h), \quad T(0) \leqq \frac{1}{s}\sum_i (i-h) = \frac{s-1}{2} - h$$

was in (11) eingesetzt die Behauptung über g ergibt. Entsprechend beweist man $G \geqq \frac{1}{2}$. Gleichzeitig ist damit bewiesen, daß nur für $\Theta(a_i) = \frac{i}{s} + \text{const.}$ $G = \frac{1}{2}$ und $g = -\frac{1}{2}$ gilt.

§ 4. G und g hängen stetig von den a_i ab. Denn, da eine gemeinsame Verschiebung aller a_i auf G und g keinen Einfluß hat, kann man sich die a_i so denken, daß für alle i $\Theta(a_i) \neq -\frac{1}{2}$ ist. Ist dann

$$\varepsilon < \min(\Theta(a_i)+\tfrac{1}{2}),\ \varepsilon < \min(\tfrac{1}{2}-\Theta(a_i))$$

und $\varepsilon > 0$ und sind die b_i solche Zahlen, daß $|b_i - a_i| < \varepsilon$ gilt, so ist

$$\Theta(b_i)-\Theta(a_i) = b_i - a_i$$

und daher $|\max(i-s\,\Theta(b_i)) - \max(i-s\,\Theta(a_i))| < s\,\varepsilon$. Dasselbe gilt für die Minima und für die den a_i und b_i entsprechenden Summen $T(0)$, woraus nach (10) und (11) die Behauptung folgt.

§ 5. Wenn N eine positive, ganze Zahl bedeutet, alle a_i Vielfache von $1/N$ sind und auch für u' nur Vielfache von $1/N$ zugelassen werden, liegen sämtliche $\Theta(u'+a_i)$ im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-1/N]$; die $\Theta(u+a_i)$ können also um jede Zahl $<1/N$ größer sein, wenn den u keine Beschränkung auferlegt ist. Die obere Grenze der $\sum_{i=0}^{s-1} \Theta(u'+a_i)$ ist daher $G-s/N$. (Ich habe diesen § nur eingeschaltet, weil ich mich in einer anderen Untersuchung darauf berufen möchte.)

§ 6. Nun sei α eine reelle Zahl und $a_i = i\,\alpha$. Bei Bedarf werde die Summe $T(u)$ ausführlicher mit $T(u, s)$ oder $T(u, s, \alpha)$ und G bzw. g mit $G(s, \alpha)$ bzw. $g(s, \alpha)$ bezeichnet.

Es ist

$$T(u, s, \alpha) = \sum_i \Theta(u+i\,\alpha)$$

Behauptung: Es ist

$$G(s, \alpha) = -g(s, \alpha). \tag{12}$$

Beweis: Weil

$$-z_i - (s-1)\,\alpha = -1 + i\,\alpha - [i\,\alpha] - (s-1)\,\alpha \equiv -(s-i-1)\,\alpha \equiv$$
$$\equiv z_{s-i-1} \pmod 1$$

ist und weil $s-i-1$ mit i zugleich alle ganzen Zahlen von 0 bis $s-1$ durchläuft, findet man mit Benützung von (7) für $j = 0, 1, \ldots s-1$

$$-T(z_{s-j-1}) = -T(-z_j-(s-1)\,\alpha) = -\sum_i \Theta(-z_j-(s-1)\,\alpha+i\,\alpha) =$$
$$= -\sum_i \Theta(-z_j-i\,\alpha) = T(z_j)+m_j. \tag{13}$$

Die Menge der Zahlen $T(z_i)$ geht also durch Spiegelung am Nullpunkt in die Menge der Zahlen $T(z_i)+m_i$ über, woraus die Behauptung ohne weiters folgt.

§ 7. Es sei jetzt $\alpha-[\alpha]=\frac{1}{b_1}\dotplus\frac{1}{b_2}\dotplus\ldots$ die — bei rationalem α eine — regelmäßige Kettenbruchentwicklung von $\alpha-[\alpha]$. $B_{-1}=0$, $B_0=1$, $B_1=b_1,\ldots$ seien die Näherungsnenner, $A_{-1}=1$, $A_0=0$, $A_1,\ldots$ seien die Näherungszähler von $\alpha-[\alpha]$. Schließlich seien $d_{-1}=1$, $d_0=\alpha-[\alpha]$, $d_1,\ldots$ die Reste bei den zur Bestimmung der b_k nötigen Divisionen, so daß $d_{k-1}=b_{k+1}\,d_k+d_{k+1}$ ist. Dann gilt

$$A_k-d_0\,B_k=-(-1)^k\,d_k, \tag{14}$$

$$B_{k+1}\,d_k+B_k\,d_{k+1}=1, \tag{15}$$

$$A_{k+1}\,d_k+A_k\,d_{k+1}=d_0. \tag{16}$$

§ 8. Ist α irrational, so bestehen folgende geometrische Sätze, deren erster eine Deutung von Formel (15) ist*:

Für jedes $r\geqq-1$ teilen die Summanden von (17)

$$T(0,\ B_r+B_{r+1})$$

das Intervall I in B_r Intervalle der Länge d_{r+1} und B_{r+1} Intervalle der Länge d_r.

Wenn p ganz und (18)

$$1\leqq p\leqq b_{r+2}$$

ist, teilen die Summanden von $T(0,\ B_r+p\,B_{r+1})$ jedes der unter (17) erwähnten Intervalle der Länge d_r in $p-1$ Intervalle der Länge d_{r+1} und ein Restintervall der Länge $d=d_r-(p-1)\,d_{r+1}>d_{r+1}$. Die bereits unter (17) genannten Intervalle der Länge d_{r+1} werden nicht weiter geteilt.

Die Summanden von $T(z_i,\ B_r+pB_{r+1})$ teilen daher für jedes i das Intervall I in „Elementarintervalle" der Längen d und d_{r+1}, in derem Innern keine Summanden mehr liegen. Da α irrational ist, ist auch das Verhältnis $d:d_{r+1}$ irrational. Die Länge eines Intervalles, das von zwei Summanden begrenzt wird, hat also eine einzige Darstellung $Dd_{r+1}+Ed$ mit ganzem D und E. $D+E$ ist die Anzahl der Elementarintervalle, in die das Intervall zerlegt ist.

---

* S. z. B. *Lettenmeyer*, Deutsche Mathematik, *3*, 75 (1938). Satz (18) ist dort nicht ausdrücklich ausgesprochen, geht aber ohne weiters aus dem Beweis hervor.

Für $i = 0, 1, \ldots B_r+pB_{r+1}-2$ gehört der Punkt $\Theta(\alpha)$ wegen $\Theta((i+1)\alpha+z_i) = \Theta(i\alpha+\alpha-i\alpha+[i\alpha]+1) = \Theta(\alpha)$ zu den Summanden von $T(z_i)$ und es ist $z_{i+1} \equiv z_i - d_0$. Nach (16) und (18) ist

$$d_0 = (A_r+(p-1)A_{r+1})d_{r+1}+A_{r+1}d.$$

Also kann die Verschiebung um $-d_0$ durch

$$A_r+(p-1)A_{r+1}+A_{r+1} = A_r+pA_{r+1}$$

Verschiebungen um Elementarintervalle erreicht werden. Ebensoviele Summanden ändern sich also bei der Verschiebung um $-d_0+1$, während sich die übrigen nur um $-d_0$ ändern. Es ergibt sich daher für die Differenz

$T(z_{i+1})-T(z_i)$ der Wert $-d_0(B_r+pB_{r+1})+A_r+pA_{r+1}$, also nach (14)

$$T(z_{i+1})-T(z_i) = -(-1)^r(d_r-pd_{r+1}).$$

Es ist daher für $i = 0, 1, \ldots B_r+pB_{r+1}-1$

$$T(z_i) = T(0)-i(-1)^r(d_r-pd_{r+1}). \qquad (18a)$$

Da für p nur solche Werte zugelassen sind, für die $d_r-pd_{r+1} > 0$ ist, ist für gerade r

$$T(0) = \max T(z_i) \text{ und } T(0)-(B_r+pB_{r+1}-1)(d_r-pd_{r+1}) = \min T(z_i).$$

Aus $G = \max T(z_i)+1 = -g = -\min T(z_i)$ ergibt sich

$$G(B_r+pB_{r+1}, \alpha) = \tfrac{1}{2}(B_r+pB_{r+1}-1)(d_r-pd_{r+1})+\tfrac{1}{2}. \qquad (19)$$

Für ungerade r ist $T(0) = \min T(z_i)$ und für G ergibt sich analog dieselbe Formel.

§ 9. Aus § 4 folgt, daß Formel (19) auch für rationale α gilt. Denn setzt man eine der beiden Folgen der Teilnenner eines rationalen $\alpha-[\alpha]$ irgendwie ins Unendliche fort, so erhält man die Folge der Teilnenner einer irrationalen Zahl β. Die Folge ihrer Näherungsnenner beginnt mit den Näherungsnennern von α. Wählt man den ersten neu hinzukommenden Teilnenner hinreichend groß, so unterscheidet sich $\alpha-[\alpha]$ von β beliebig wenig und auch die entsprechenden Divisionsreste d_r der beiden Zahlen unterscheiden sich beliebig wenig.

Indem man $p = b_{r+2}$ und $r+2 = r'$ setzt, ergibt sich, daß (19) auch für $p = 0$ und $r \geqq 1$ gilt. Ihre Gültigkeit für $p = 0$ und $r = -1$, $r = 0$ ersieht man durch Einsetzen dieser Werte unmittelbar. Also:

Formel (19) gilt für alle $\alpha \neq 0$, $r \geqq -1$ und $0 \leqq p \leqq b_{r+2}$ (bzw. $0 \leqq p$, wenn es kein b_{r+2} mehr gibt).

Durchläuft p wachsend das Intervall $[0, b_{r+2}]$, so nimmt $G(B_r+pB_{r+1})$ zunächst bis zum Maximalwert $\frac{1}{2}+\frac{(1-d_{r+1})^2}{8\,B_{r+1}\,d_{r+1}}$ zu, sodann bis zum Ende des Intervalls wieder ab. Für $p=0$ ergibt sich

$$G(B_r) = \tfrac{1}{2}(B_r-1)\,d_r+\tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2}\,B_{r+1}\,d_r+\tfrac{1}{2} \leqq 1. \tag{20}$$

§ 10. Aus Formel (20) kann man auf folgende Weise eine Abschätzung für Δ (Formel 3) herleiten. Ist B_r ein Näherungsnenner von α_2/α_1, bedeuten $i_0, g_3, \ldots g_k$ irgendwelche feste, nichtnegative ganze Zahlen und kommen in der Summe Δ die B_r Summanden

$$\Theta((x-i\,\alpha_2-g_3\,\alpha_3-\ldots-g_k\,\alpha_k)/\alpha_1)$$

für $i = i_0, i_0+1, \ldots i_0+B_r-1$ vor, so bilden sie zusammen die Summe $T(u, B_r, \alpha_2/\alpha_1)$ mit $u = (x-(i_0+B_r-1)\,\alpha_2-g_3\,\alpha_3-\ldots-g_k\,\alpha_k):\alpha_1$, eine Summe, deren Absolutbetrag $< G(B_r, \alpha_2/\alpha_1)$ ist. Ziehen wir q solche Gruppen von Summanden aus der Summe Δ heraus, so bleiben $n(x, \alpha_2, \ldots \alpha_k)-B_r\,q$ Summanden übrig, von denen jeder einen Betrag $\leqq \frac{1}{2}$ hat. Für Δ ergibt sich damit folgende Abschätzung

$$|\Delta| < q\,G(B_r) + \tfrac{1}{2}\,n(x, \alpha_2, \ldots \alpha_k) - \tfrac{1}{2}\,q\,B_r$$

oder

$$|\Delta| < \tfrac{1}{2}\,n(x, \alpha_2, \ldots \alpha_k) - \tfrac{1}{2}\,q\,(B_r-1)\,(1-d_r). \tag{21}$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung nimmt mit wachsendem q monoton ab, sobald $r \geqq 1$ ist. Die beste Abschätzung erhält man daher für den größtmöglichen Wert von q. Sind $g_3, \ldots g_k$ fest und ist

$$y = g_3\,\alpha_3+\ldots g_k\,\alpha_k,$$

so kann g_2 die Werte 0 bis $[(x-y)/\alpha_2]$ annehmen. Sie ergeben

$$[[(x-y+\alpha_2)/\alpha_2]:B_r] = [(x-y+\alpha_2-B_r\,\alpha_2)/B_r\,\alpha_2]+1 =$$
$$= n(x+\alpha_2-B_r\,\alpha_2-y;\, B_r\,\alpha_2)$$

Summandengruppen der geschilderten Art. Summiert man über g_3 bis g_k, so ergibt sich $n(x+\alpha_2-B_r\,\alpha_2, B_r\,\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k)$ als größter Wert von q. Für Δ findet man so die Abschätzung

$$|\Delta| < \tfrac{1}{2}\{n(x; \alpha_2, \ldots \alpha_k)-(B_r-1)\,(1-d_r)\,n(x+\alpha_2-B_r\,\alpha_2; B_r\,\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k)\}. \tag{22}$$

Die Formeln (1) und (2) ergeben für n den Spielraum $Cx^{k-1}+O(x^{k-2})$, worin $C = ((k-1)!\,\alpha_2 \ldots \alpha_k)^{-1}$ ist. Bei Anwendung von (22), (4) und (5) hingegen ergibt sich nur ein Spielraum von

$$Cx^{k-1}-(B_r-1)\,(1-d_r)\,CB_r^{-1}\,x^{k-1}+O(x^{k-2}) =$$
$$= Cx^{k-1}\,(d_r+(1-d_r)B_r^{-1})+O(x^{k-2}),$$

was für $B_r \geqq 2$ günstiger ist. Wenn x von derselben Größenordnung wie $B_r\, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_k$ ist, können die in $O(x^{k-2})$ zusammengefaßten Glieder das Resultat noch wesentlich beeinflussen. Wegen der lockeren Beziehung zwischen B_r und d_r kann man nicht exakt angeben, für welche Wahl von B_r (22) das günstigere Resultat ergibt. Unter gewissen zusätzlichen Annahmen empfiehlt sich, B_r nahe bei $\sqrt{2x/(k-1)\,\alpha_2}$ zu nehmen.

Weitere Ergebnisse über $x^3+y^3=z^3$ in quadratischen Körpern.

Von

Alexander Aigner, Graz.

(Eingelangt am 10. März 1952.)

1. Einleitung.

In der Frage, in welchen quadratischen Körpern $K(\sqrt{m})$ die Fermat-Gleichung des Exponenten 3 (nicht-trivial) lösbar ist, erzielte *R. Fueter* in einer bahnbrechenden Arbeit („Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$", Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Heidelberg, 1913) folgendes Ergebnis: Ist $m < 0$, $m \equiv 2\ (3)$ und die Klassenzahl des Körpers nicht durch 3 teilbar, so ist $x^3 + y^3 = z^3$ in Zahlen aus $K(\sqrt{m})$ unmöglich. Wo es jedoch möglich ist, gibt es stets unendlich viele (wesentlich verschiedene) Lösungen. — Ferner gilt die Möglichkeit oder Unmöglichkeit immer zugleich in den beiden Körpern $K(\sqrt{m})$ und $K(\sqrt{-3m})$; schon in dieser Arbeit *Fueters* für den konjugierten Lösungstyp (bei rationalem z sind x und y konjugiert) gezeigt, dann allgemein nach *T. Nagell* („Bemerkungen über die diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$", Arkiv för Mat. 25, 1935) sowie auch *E. Fogels* („Über die Möglichkeit diophantischer Gleichungen in relativ quadratischen Körpern", Acta Univ. Latviensis, 1940).

Wegen dieser Bindung zwischen m und $-3m$, wonach man mit nicht durch 3 teilbarem m auskommt, und der Rolle, welche noch Vorzeichen und Rest mod. 3 spielen, haben wir nun im Ganzen die vier Fälle:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \sqrt{3n+1} & \text{und } \sqrt{-(9n+3)} \\ 2.\ \sqrt{-(3n+1)} & \text{und } \sqrt{9n+3} \\ 3.\ \sqrt{3n+2} & \text{und } \sqrt{-(9n+6)} \\ 4.\ \sqrt{-(3n+2)} & \text{und } \sqrt{9n+6} \end{array}\right\} \quad (n \geqq 0)$$

Der 2. Fall ist der von *Fueter* behandelte. — In dieser Arbeit werde ich nun vor allem für den 1. Fall ein ganz analoges Ergebnis ableiten;

diese beiden Fälle mit $|m| \equiv 1\ (3)$ zeigen danach eine gewisse innere Verwandtschaft, wie andererseits auch die schwierigeren beiden Fälle mit $|m| \equiv 2\ (3)$, welche ich nebenbei beleuchte. Schließlich zeige ich auch an Hand eines Sonderfalles, daß die Teilbarkeit der Klassenzahl durch 3 zur Lösbarkeit der Gleichung *nicht* hinreicht. (Bei *Fueter* als „vielleicht hinreichend" bezeichnet.)

Die reellen Lösungen unserer Gleichung kann man auch als (verhältnismäßig einfache) Lösungen einer geometrischen Konstruktionsaufgabe mit Zirkel und Lineal deuten; nämlich der Aufgabe, drei Würfel zu finden, deren zwei zusammen im Rauminhalt gleich dem dritten sind.

2. Ausschaltung der nicht-konjugierten Lösungen.

Seien nun x, y, z irgendwelche Lösungswerte aus $K(\sqrt{m})$, so lassen sie sich zunächst immer auf die Gestalt

$$(a_1 + b_1\sqrt{m})^3 + (a_2 + b_2\sqrt{m})^3 = c^3 \qquad \text{(A)}$$

mit ganz-rationalen a_1, b_1, a_2, b_2, c bringen. Ist hiebei $a_1 = a_2$, $b_1 = -b_2$, so liegt eine *konjugierte* (nach *Fueter* „spezielle") Lösung vor. Wir zeigen nun, daß sie so gut wie die allgemeine ist.

Dieser Ansatz (A) führt nun durch Vergleich der Rational- und Irrationalteile auf die beiden Grundgleichungen

$$a_1^3 + a_2^3 + 3m(a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2) = c^3 \qquad \text{(I)}$$

$$3(a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2) + m(b_1^3 + b_2^3) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Multipliziert man nun (I) mit $(b_1^3 + b_2^3)^3$ und eliminiert hierin m nach (II), so ergibt sich nach entsprechenden Umrechnungen

$$(a_1 b_2^3 - 2a_1 b_1^3 - 3a_2 b_1 b_2^2)^3 + (a_2 b_1^3 - 2a_2 b_2^3 - 3a_1 b_1^2 b_2)^3 = \\ = c^3 (b_1^3 + b_2^3)^3,$$

ein rational ganzes Fermat-Tripel, welches nur so bestehen kann, daß einer dieser Kuben Null wird.

Die erste Möglichkeit $b_1^3 + b_2^3 = 0$, d. h. $b_1 = -b_2 \neq 0$, führt sogleich auch auf $a_1 = a_2$, also direkt auf eine konjugierte Lösung: Nach (II) wird zunächst $a_1 = \pm a_2$, wobei dann die Wahl $a_1 = -a_2$ als triviale Lösung ausfällt.

Die beiden anderen Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch Vertauschung der Indizes, bedeuten also im Wesen dasselbe. Es genügt etwa der Ansatz

$$a_1 b_2^3 - 2a_1 b_1^3 - 3a_2 b_1 b_2^2 = c(b_1^3 + b_2^3)$$

$$a_2 b_1^3 - 2 a_2 b_2^3 - 3 a_1 b_1^2 b_2 = 0$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen für a_1 und a_2, die sich eindeutig auflösen lassen

$$a_1 = \frac{(-b_1^3 + 2 b_2^3) c}{2 (b_1^3 + b_2^3)}, \quad a_2 = \frac{-3 b_1^2 b_2 c}{2 (b_1^3 + b_2^3)},$$

da jetzt $b_1^3 + b_2^3 \neq 0$ ist. Danach ergibt sich nach (II) auch

$$m = \frac{-3 b_1 (b_1^3 + 4 b_2^3) c^2}{4 (b_1^3 + b_2^3)^2}$$

und so wird schließlich die Ausgangsgleichung (A) zu

$$(-b_1^3+2b_2^3+b_1\sqrt{-3b_1(b_1^3+4b_2^3)})^3+(-3b_1^2b_2+b_2\sqrt{-3b_1(b_1^3+4b_2^3)})^3= \\ = (2 b_1^3 + 2 b_2^3)^3.$$

Diese Gestalt geht aber durch Multiplikation mit dem zum zweiten Kubus konjugierten Wert und Kürzung durch $2 b_2 (b_1^3 + b_2^3) \neq 0$ ($b_2 = 0$ führte nach (II) in $K(\sqrt{-3})$, der sowieso nicht in Frage kommt) über in

$$(3b_1^2+\sqrt{-3b_1(b_1^3+4b_2^3)})^3+(3b_1^2-\sqrt{-3b_1(b_1^3+4b_2^3)})^3=(-6b_1b_2)^3,$$

also in eine *konjugierte Lösung*. Jede Lösung unterscheidet sich also höchstens unwesentlich, durch einen Faktor, von einer konjugierten.

Es gibt keine wesentlich nicht-konjugierten Lösungen. Dadurch wird die völlige Bindung von m und $-3m$, schon von *Fueter* für die konjugierte Lösung vermerkt, noch besonders deutlich.

Unsere obige Lösungsformel, welche wesentlich nur vom Verhältnis $b_1 : b_2$ abhängt, liefert nur für $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, oder $b_1 = -b_2$ triviale Fälle, wo ein Kubus verschwindet. Sie stimmt auch mit dem allgemeinen Ansatz in konjugierter Form

$$(a + b\sqrt{m})^3 + (a - b\sqrt{m})^3 = c^3$$

überein. Denn dieser liefert

$$2 a^3 + 6 a m b^2 = c^3 = 8 d^3, \text{ also } m = \frac{4 d^3 - a^3}{3 a b^2}$$

und daraus schließlich

$$(3 a^2 + \sqrt{-3 a (a^3 - 4 d^3)})^3 + (3 a^2 - \sqrt{-3 a (a^3 - 4 d^3)})^3 = (6 a d)^3,$$

dieselbe Form.

Daraus ersehen wir auch: Die Menge der (quadratfreien) Zahlen m, für welche $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$ möglich ist, ist genau die Menge der mit der Form $-3 X (X^3 + 4 Y^3)$ oder (nach der Bindung) auch

$X(X^3+4Y^3)$ quadrat-verwandten Zahlen, d. h. für welche die Gleichung

$$X(X^3+4Y^3) = mZ^2$$

lösbar ist. Eine Ausnahme bildet nur $m=-3$ bei $X:Y=-1$. — Für diese letztere Form gibt es auch die direkte Lösung $x^3+\bar{x}^3=z^3$ mit $x = 9X^2Y^3+(2X^3-Y^3)\sqrt{X(X^3+4Y^3)}$, $z = 6XY(X^3+Y^3)$.

3. Der Fall m = 3 n + 1 > 0.

In den folgenden Kapiteln 3 bis 6 wollen wir der größeren Einheitlichkeit und Übersicht halber m stets als *positiv* und *nicht durch 3 teilbar* annehmen und von den vier Körpern $K(\sqrt{m})$, $K(\sqrt{-m})$, $K(\sqrt{3m})$ $K(\sqrt{-3m})$ sprechen, wobei dann noch die Fälle $m\equiv 1\ (3)$ und $m\equiv 2\ (3)$ zu unterscheiden sind.

Wir nehmen also zuerst $m\equiv 1\ (3)$, m > 0 und können die allgemeine Lösung in $K(\sqrt{m})$ in konjugierter Form ansetzen

$$(a+b\sqrt{m})^3+(a-b\sqrt{m})^3=c^3 \qquad (1)$$

oder ausgeführt

$$2a(a^2+3mb^2)=c^3,$$

wobei man noch $(a,b)=1$ voraussetzen darf. Dann ist c gewiß gerade, b aber ungerade und auch nicht durch 3 teilbar (weil aus $2\mid b$ bzw. $3\mid b$ auch $2\mid a$, bzw. $3\mid a$ folgte). Mit m ist auch a gerade. Ferner ist 3 in a entweder gar nicht enthalten oder sonst $3^{3\nu+2}\,||\,a$. Im übrigen sei $(m,a)=k$. Bei $2\mid m$ wird auch $2\mid k$. (k ist auch quadratfrei.) — All das ermöglicht nun die vier Ansätze:

$$2a=k^2f^3,\quad a^2+3mb^2=kg^3 \qquad (2a)$$

$$a=k^2f^3,\quad a^2+3mb^2=4kg^3 \qquad (2b)$$

$$2a=9k^2f^3,\quad a^2+3mb^2=3kg^3 \qquad (2c)$$

$$a=9k^2f^3,\quad a^2+3mb^2=12kg^3 \qquad (2d)$$

wo jedesmal noch $(f,g)=1$ gilt. Wir wollen diese vier Ansätze weiterhin parallel behandeln.

Setzt man aus der jeweils ersten Gleichung den Wert für a in die zweite ein, so kommt man jedesmal zu einer algebraisch ganzen Zahl ϑ des Körpers $K(\sqrt{-3m})$, deren Norm $\vartheta\bar{\vartheta}$ ein rationaler Kubus ist. Dies ist der Reihe nach in den vier Fällen:

$$\vartheta=\frac{k^3f^3}{2}+kb\sqrt{-3m},\qquad \vartheta\bar{\vartheta}=k^3g^3 \qquad (3a)$$

$$\vartheta = \frac{k^3 f^3 + kb\sqrt{-3m}}{2}, \qquad \vartheta\,\bar{\vartheta} = k^3 g^3 \tag{3b}$$

$$\vartheta = \frac{27 k^3 f^3}{2} + 3 kb\sqrt{-3m}, \quad \vartheta\,\bar{\vartheta} = 27 k^3 g^3 \tag{3c}$$

$$\vartheta = \frac{27 k^3 f^3 + 3 kb\sqrt{-3m}}{2}, \quad \vartheta\,\bar{\vartheta} = 27 k^3 g^3 \tag{3d}$$

Auf jeden Fall ist, wovon man sich leicht überzeugt, (ϑ) eine 3. Idealpotenz. (Die gemeinsamen Idealteiler von ϑ und $\bar{\vartheta}$, das sind nur die Teiler von k und fallweise noch der von 3, gehen genau in 3. Potenz auf.) — Ist nun die *Klassenzahl von* $K(\sqrt{-3m})$ *kein Vielfaches von* 3, so muß, da auch außer ± 1 keine Einheiten vorkommen, ϑ direkt dritte Potenz einer Zahl dieses Körpers sein. Damit scheiden auch die beiden ersten Fälle (3a, b) aus, weil ein solcher Kubus immer einen durch 3 teilbaren Imaginärteil hat. Daher gilt auch schon $9 \mid a$.

In den beiden andern Fällen (3c, d) können wir aber setzen

$$\vartheta = \left(\frac{3r + s\sqrt{-3m}}{2}\right)^3 \text{ mit } r \equiv s\ (2),\ (r, s) = 1,\ 2,\ 3 \nmid s$$

und haben, da $\vartheta + \bar{\vartheta} = 27 k^3 f^3$ ist, ein Fermat-Tripel in $K(\sqrt{-3m})$

$$(3r + s\sqrt{-3m})^3 + (3r - s\sqrt{-3m})^3 = (6kf)^3 \tag{4}$$

das im Vergleich der Realteile

$$r(r^2 - ms^2) = 4 k^3 f^3$$

ergibt. Dabei gilt stets $(r, m) = k$ und je nach der Geradheit von m, r, s findet man wieder vier Varianten, die aber alle zu einer Zahl η aus $K(\sqrt{m})$ führen, deren Norm $\eta\,\bar{\eta}$ ein Kubus ist.

$1.\ 2 \mid m, 4 \mid r, 2 \parallel s \quad 2.\ 2 \nmid m, 8 \mid r, 2 \parallel s \quad 3.\ 2 \nmid m, r, s \quad 4.\ 2 \nmid m, 2 \parallel r, s$

(Die beiden letzten nur für $m \equiv 1$ (4) möglich). In den drei ersten Fällen ist $r = k^2 h^3$, $r^2 - ms^2 = 4 kj^3$, im letzten $r = 2 k^2 h^3$, $r^2 - ms^2 = 16 kj^3$ zu setzen, und je nach diesen beiden Ansätzen wird

$$\eta = \frac{k^3 h^3 + ks\sqrt{m}}{2}, \quad \eta\,\bar{\eta} = k^3 j^3 \tag{5a}$$

$$\eta = \frac{k^3 h^3}{2} + \frac{ks\sqrt{m}}{4}, \quad \eta\,\bar{\eta} = k^3 j^3 \tag{5b}$$

Immer ist der Rationalteil von η ein halber Kubus und wieder ist (η)

leicht als 3. Idealpotenz zu erkennen. Ist nun η auch eine 3. *Zahl*potenz,

$$\eta = \left(\frac{A + B\sqrt{m}}{2}\right)^3 \text{ mit } A \equiv B\,(2),\ (A, B) = 1, 2,\ 3 \nmid B,\ (A, m) = k,$$

so haben wir glatt in

$$(A + B\sqrt{m})^3 + (A - B\sqrt{m})^3 = (2\,kh)^3 \qquad (6)$$

ein „kleineres" Tripel in $K(\sqrt{m})$ bekommen, also einen unendlichen Regreß, der die Unmöglichkeit anzeigt.

Die Verkleinerung von a zu A ersieht man aus dem Zusammenhang

$$a = \frac{9\,A\,(A^2 + 3\,mB^2)}{2^\nu \cdot k^2}(r^2 - ms^2) \text{ mit } \nu = 4, 5 \qquad (7)$$

sowohl für den Absolutbetrag — k teilt A, m, r, daher $\left|\frac{a}{A}\right| \geqq \frac{9}{8}$ — als auch für den Exponenten, zu dem 3 aufgeht.

Wir müssen also noch die Klassenzahl und die Einheiten des Körpers $K(\sqrt{m})$ bedenken. Nun ist aber die Klassenzahl von $K(\sqrt{m})$ *nicht durch* 3 *teilbar*, sobald es die von $K(\sqrt{-3\,m})$ nicht ist — was wir ja schon früher annahmen. Nach *A. Scholz* („Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper zueinander", J. reine angew. Math. **116**, 201—203 (1932). Diese Schwierigkeit fällt somit weg.

Bleiben die Einheiten. Da wird der nach (5a, b) bestimmte Wert $\eta = \varepsilon\,\alpha^3$, und wir kommen statt auf eine Gleichung $\alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = z^3$ auf eine $\varepsilon\,\alpha^3 + \bar{\varepsilon}\,\bar{\alpha}^3 = z^3$. Dabei kann die Einheit ε immer mit der Norm $+1$ gewählt werden, etwa die 1., 2., oder -2. Potenz der Grundeinheit, letztere statt der 1., falls diese die Norm -1 haben sollte. Wir setzen also

$$\eta = \varepsilon\,\alpha^3 = \left(\frac{t + u\sqrt{m}}{2}\right)\left(\frac{A + B\sqrt{m}}{2}\right)^3 \text{ mit } t^2 - mu^2 = +4$$

wobei stets noch $u \equiv 0\,(3)$, und damit $t \equiv \pm 2\,(9)$ sein muß.

Dieser Ansatz liefert nun im Vergleich der Rationalteile

$$t\,A\,(A^2 + 3\,mB^2) + umB\,(3\,A^2 + mB^2) = 8\,k^3\,h^3 \qquad (8)$$

Wegen des nach (5a, b) durch 3 nicht teilbaren Irrationalteiles von η gilt stets $3 \nmid B$. Bezüglich A besteht hier zweierlei Möglichkeit. Ist erstens $3 \mid h$, damit auch $3 \mid A$, d. h. η zu 3 prim, dann ist aus (8) unmittelbar $u \equiv 0\,(9)$ abzulesen. η befindet sich unter den zu 3 primen Körperzahlen im Teilsystem vom Index 3, welches die Zahlen mit durch 9 teilbarem Rational- oder Irrationalteil darstellen. Es kann η nur dann

ein ε-facher Kubus sein, wenn die Grundeinheit ebenfalls diesem Teilsystem angehört. — Ist zweitens $3 \nmid h$, $3 \nmid A$, d. h. η zu 3 nicht prim, so schreibt sich (8) als Kongruenz mod. 9

$$\pm 2A^3 \pm 6AmB^2 + um^2B^3 \equiv \pm 1 \ (9) \qquad (9)$$

oder, da $mB^2 \equiv 1 \ (3)$ ist, (übrigens die erste Stelle, wo $m \equiv 1 \ (3)$ zur Geltung kommt!)

$$\pm 2A^3 \pm 6A + um^2B^3 \equiv \pm 1 \ (9)$$

Und weil immer $A^3 + 3A \equiv \pm 4$ ausfällt, wird $\pm 1 + um^2B^3 \equiv \pm 1$, also wiederum $u \equiv 0 \ (9)$.

Der Ansatz $\eta = \varepsilon \alpha^3$ erweist sich also nur dann als statthaft, wenn die Grundeinheit in $K(\sqrt{m})$ einen durch 9 teilbaren Rational- oder Irrationalteil hat, d. h. wenn sie kubischer Rest mod. 9 ist. In diesem Falle ist aber, wieder nach obzitierter Arbeit von *A. Scholz* (am Schluß S. 203), die Klassenzahl in $K(\sqrt{-3m})$ durch 3 teilbar. Soll das unserer Annahme gemäß nicht der Fall sein, so gilt $3 \parallel u$ und daher wird der Ansatz $\eta = \varepsilon \alpha^3$ unmöglich. Damit ist der Beweis vollendet. Wir erhalten also den Satz:

Für $m = 3n + 1 > 0$ ist die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in den Körpern $K(\sqrt{m})$ und $K(\sqrt{-3m})$ unmöglich, wenn letzterer eine nicht durch 3 teilbare Klassenzahl hat.

Hievon betroffene Werte wären etwa $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. — Dieses Resultat ist völlig analog zu dem *Fueters* im Falle $\sqrt{-(3n+1)}$; maßgebend ist die Klassenzahl im *imaginären* der beiden korrespondierenden Körper. Hingegen braucht die Klassenzahl im reellen $K(\sqrt{m})$ (analog $\sqrt{3m}$) nicht durch 3 teilbar sein; so ist z. B. die Gleichung lösbar bei $\sqrt{43}$ (Klassenzahl 1).

4. Der Fall $m = 3n + 2 > 0$.

Nehmen wir nun $m \equiv 2 \ (3)$, $m > 0$, so überträgt sich die gesamte Ableitung des vorigen Kapitels bis Formel (9), nur daß man, um auf eine Einheit $\varepsilon = \dfrac{t + u\sqrt{m}}{2}$ mit $3 \mid u$ zu kommen, die Grundeinheit allenfalls noch in die 4. (bzw. —4.) Potenz erheben muß, und daß die Zahl η auf jeden Fall zu 3 prim ist (auch für $3 \nmid h$). Aus (9) wird aber, da jetzt $mB^2 \equiv 2 \ (3)$ ist,

$$\pm 2A^3 \pm 3A + um^2B^3 \equiv \pm 1 \ (9)$$

und nach $2A^3+3A \equiv \pm 4$ nunmehr $um^2 B^3 \equiv \pm 6$ (9), also $3 \mid\mid u$. Der Ansatz $\eta = \varepsilon \alpha^3$ ist daher nicht auszuschließen.

Wohl aber können wir über die Art etwaiger Lösungen einen Schluß ziehen. Da im Falle $3 \mid h$ wie früher $9 \mid u$ folgt, so vollzieht sich der Abstieg zu einer „kleineren" Lösung (A, B, C), sobald in der ursprünglichen Lösung (a, b, c) das a eine höhere Potenz von 3 enthält als 9. ($9 \mid a$ gilt hier sicher, weil sonst $3 \nmid a$ und $c^3 = 2a^3 + 6amb^2 \equiv \pm 4$ (9) wäre.) Es gibt also eine Lösung mit $3^2 \mid\mid a$, $3 \mid\mid c$, wenn überhaupt eine. Ihr geht als Vorstufe eine Gleichung $\varepsilon \alpha^3 + \bar{\varepsilon}\,\bar{\alpha}^3 = z^3$ voraus. Desgleichen zeigt Formel (4), wo mit $3^2 \mid\mid a$ $3 \nmid r$ gilt, auch eine Lösung „niederster Stufe" in $K(\sqrt{-3m})$ an. Wir können also sagen:

Ist im Falle $m = 3n + 2 > 0$ *die Klassenzahl von* $K(\sqrt{-3m})$, *und damit auch die von* $K(\sqrt{m})$, *nicht durch 3 teilbar, so gibt es in beiden Körpern, wenn überhaupt eine, so immer eine Lösung* $x^3 + \bar{x}^3 = z^3$ *der niedersten Stufe mit* $3 \mid\mid z$, *d. h. mit* $3^2 \mid\mid R(x)$ *für* $\sqrt{m}$, *mit* $3 \mid\mid R(x)$ *für* $\sqrt{-3m}$. (R = Rationalteil).

Umgekehrt ist der Aufstieg zu beliebig hohen Stufen, schon nach *Fueter*, immer möglich; und zwar, wie Formel (7) zeigt, schrittweise. Es existieren also alle Stufen. — Bei durch 3 teilbarer Klassenzahl könnten höhere Stufen vorhanden sein und die niederen fehlen.

5. Der Fall $\sqrt{-(3n+2)}$.

Diesen nun auch ausständigen Fall erhalten wir durch Betrachtung der Körper $K(\sqrt{-m})$ und $K(\sqrt{3m})$ mit $m \equiv 2$ (3), $m > 0$, wo dazu noch für $m \equiv 1$ (3) der von *Fueter* behandelte Fall mitläuft. Hier unterliegen die vorigen Formeln einer kleinen Modifikation.

Wir gehen vom reellen Körper aus

$$(a + b\sqrt{3m})^3 + (a - b\sqrt{3m})^3 = c^3 = 2a(a^2 + 9mb^2)$$

wo stets $3 \mid a$, genau $3^{3\nu+1} \mid\mid a$ sein muß, und gelangen durch die entsprechenden Zerlegungen auf den Kubus

$$\vartheta = \frac{k^3 f^3}{2} + kb\sqrt{-m} \text{ oder } \frac{k^3 f^3 + kb\sqrt{-m}}{2}$$

woraus (bei nicht durch 3 teilbarer Klassenzahl) eine Lösung in $K(\sqrt{-m})$

$$(r + s\sqrt{-m})^3 + (r - s\sqrt{-m})^3 = (2kf)^3$$

folgt. Nun wird, je nachdem $3 \nmid r$ oder $3 \mid r$ ist, was von $3 \mid\mid a$ oder $81 \mid a$ abhängt,

$$\eta = \frac{k^3 h^3 + ks\sqrt{3m}}{2}, \quad \frac{k^3 h^3}{2} + \frac{ks\sqrt{3m}}{4} \tag{10a}$$

oder

$$\eta = \frac{27 k^3 h^3 + 3 k s \sqrt{3m}}{2}, \quad \frac{27 k^3 h^3}{2} + \frac{3 k s \sqrt{3m}}{4} \tag{10b}$$

Nach (10a) ist der Ansatz $\eta = \alpha^3$ wegen des zu 3 primen Irrationalteiles nicht möglich; der Ansatz $\eta = \varepsilon \alpha^3$ (wobei ε stets Grundeinheit sein kann) ergibt hier nach

$$t(A^3 + 9AB^2 m) + 9mu(A^2 B + mB^3) = 8k^3 h^3 \text{ mit } 3 \nmid AB$$

sogleich $t \equiv \pm 1$ (9), also in Verbindung mit $t^2 - 3mu^2 = 4$ unmittelbar $3mu^2 \equiv 6$ (9), d. h. $m \equiv 2$ (3) — die Unmöglichkeit im Fall *Fueters* $m \equiv 1$ (3).

Nach (10b) führt der Ansatz $\eta = \alpha^3$ zum Abstieg auf ein kleineres Tripel, der Ansatz $\eta = \varepsilon \alpha^3$ nach

$$t(A^3 + 9AB^2 m) + 9mu(A^2 B + mB^3) = 27.8 k^3 h^3 \text{ mit } 3 \mid A, 3 \nmid B$$

auf $u \equiv 0$ (3). Wir stoßen auf eine Grundeinheit in $K(\sqrt{3m})$ mit durch 3 teilbarem Irrationalteil, was wieder (nach *A. Scholz*, a. a. O.) eine durch 3 teilbare Klassenzahl von $K(\sqrt{-m})$ bedeutet. Soll das nicht sein, so gelangen wir wieder zu den „untersten" Stufen, denen als Vorstufe eine Gleichung $\varepsilon \alpha^3 + \bar{\varepsilon}\,\bar{\alpha}^3$ in $K(\sqrt{3m})$ vorangeht; ein gleichartiges Ergebnis wie vorhin.

Ist im Falle $m = 3n + 2 > 0$ *die Klassenzahl von* $K(\sqrt{-m})$, *und damit auch die von* $K(\sqrt{3m})$, *nicht durch 3 teilbar, so gibt es in beiden Körpern, wenn überhaupt eine, so immer eine Lösung* $x^3 + \bar{x}^3 = z^3$ *der niedersten Stufe, d. h. mit* $3 \nmid z$, $3 \nmid R(x)$ *bei* $\sqrt{-m}$, *mit* $3 \parallel R(x)$ *für* $\sqrt{3m}$.

Der Exponent in z bei $\sqrt{3m}$ bleibt unbestimmt, nur $\geqq 2$. — Übrigens ergibt sich hier die merkwürdige Tatsache, daß die zweitniederste Stufe, d. i. $3^4 \parallel R(x) = a$ bei $\sqrt{3m}$, $3^2 \parallel R(x) = r$ bei $\sqrt{-m}$, nicht vorkommt. Denn nach dem für jede höhere als die 1. Stufe geltenden Zusammenhang

$$a = \frac{1}{2^v \cdot k^2} A(A^2 + 9mB^2)(r^2 - 3ms^2) \text{ mit } 3 \mid A, \; r\, 3 \nmid B, s$$

wird nicht nur für $9 \mid A$, sondern auch schon für $3 \parallel A$, wo dann $A^2 + 9mB^2 \equiv 0$ (27) ist, $a \equiv 0$ (243) (damit auch $3^7 \mid a$). Der Abstieg führt immer um eine Stufe tiefer oder direkt auf die erste (weshalb

eventuell auch höhere Zwischenstufen fehlen); die zweite wird immer übersprungen. — Und aus $3^2 \| r$ ließe sich $3^4 \| a$ nach $a = 2^{-\nu} \cdot 3r(r^2 - 3ms^2)$ ableiten. Somit ergibt sich:

Ist für $m = 3n + 2 > 0$ die Klassenzahl von $K(\sqrt{-m})$ nicht durch 3 teilbar, so ist eine Gleichung

$$(9a' + b\sqrt{-m})^3 + (9a' - b\sqrt{-m})^3 = c^3 \text{ oder } (81a' + b\sqrt{3m})^3 + (81a' + b\sqrt{3m})^3 = c^3,\ (a', b) = 1 \text{ mit } 3 \nmid a'$$

unmöglich.

Bei durch 3 teilbarer Klassenzahl kann diese 2. Stufe auftreten, z. B. $(9 + \sqrt{-23})^3 + (9 - \sqrt{-23})^3 = 6^3$.

6. Ein Sonderfall der Unmöglichkeit.

Am Schlusse bringe ich noch einen Spezialsatz, der über die nicht durch 3 teilbare Klassenzahl hinausgreift:

Enthält m nur Primfaktoren der Art $3n + 1$, nach denen 2 nichtkubischer Rest ist, so ist $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$, $K(\sqrt{-m})$, $K(\sqrt{3m})$, $K(\sqrt{-3m})$ unmöglich, und zwar unabhängig von der Klassenzahl dieser Körper.

Das betrifft z. B. $\sqrt{-61}$, $\sqrt{-3.67}$, $\sqrt{79}$ trotz durch 3 teilbarer Klassenzahl. (Zu $\sqrt{-61}$ sagte *Fueter*, er konnte bisher empirisch keine Lösung finden.) — Die Teilbarkeit der Klassenzahl durch 3 ist somit zur Lösbarkeit dieser Gleichung *nicht hinreichend.*

Neben der Klassenzahl spielt also auch der kubische Restcharakter von 2 eine Rolle. So ist z. B. für eine Primzahl $p \equiv 1\ (3)$ zur Existenz eines kubischen Fermat-Tripels in $K(\sqrt{p})$ oder $K(\sqrt{-p})$ noch notwendig, daß 2 kubischer Rest mod. p ist, d. h. p die Form $p = x^2 + 27y^2$ hat.

Und nun zum Beweis. Wie am Schluß von Kapitel 2 dargelegt, ist die Lösbarkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$ gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von $X(X^3 + 4Y^3) = mZ^2$. (Bis auf den Ausnahmefall $m = -3$, $X = 1$, $Y = -1$.) Wir untersuchen nunmehr die letztere Gleichung.

Da von vornherein $(X, Y) = 1$ anzunehmen ist, können die beiden Faktoren X und $X^3 + 4Y^3$ nur den Primfaktor 2 gemeinsam haben, was bei geradem X eintritt. Dann ist aber Y ungerade und $X^3 + 4Y^3$ enthält somit genau 4 (nicht 8), was den folgenden Ansatz nicht stört.

Ist nun m von der oben angeführten Art, so kann keine Primzahl aus m in $X^3 + 4\,Y^3$ aufgehen; es muß also $m \mid X$ und weiterhin, allenfalls mit Vorzeichenänderung von X und Y,

$$X = m\,x_0^2,\ X^3 + 4\,Y^3 = y_0^2$$

sein. Wir haben also die Form $X^3 + 4\,Y^3$ zu einem Quadrat zu machen.

Das geschieht am besten im kubischen Körper $K(\sqrt[3]{2})$. Dieser hat die Klassenzahl 1, eine unabhängige Einheit $\varepsilon = \sqrt[3]{2} - 1$, und seine ganzen Zahlen haben die Form $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Nun zerlegt sich

$$X^3 + 4\,Y^3 = (X + Y\sqrt[3]{4}) \cdot (X^2 + 2\,Y^2\sqrt[3]{2} - X\,Y\sqrt[3]{4}) = \varphi \cdot \psi,$$

wo diese Faktoren, wie man sich leicht überzeugt, Idealquadrate sind. Gemeinsamer Primteiler ist nur allenfalls $\sqrt[3]{2}$ (bei geradem X) und dann in φ zur 2. Potenz aufgehend. Der Teiler von 3, $\sqrt[3]{2} + 1$, scheidet aus, da sonst als Quadrat $X^3 + 4\,Y^3 \equiv 0\,(9)$ würde, was nicht angeht. Ferner ist ψ eine positiv definite Form, daher auch $\varphi > 0$. Also gibt es nur die Ansätze $\varphi = \alpha^2$ oder $\varphi = \varepsilon\,\alpha^2$.

Setzen wir also zunächst

$$X + Y\sqrt[3]{4} = (f + g\sqrt[3]{2} + h\sqrt[3]{4})^2,$$

so liefert der Koeffizientenvergleich

$$f^2 + 4\,g\,h = X,\quad 2\,f\,g + 2\,h^2 = 0,\quad 2\,f\,h + g^2 = Y.$$

Wegen $(X, Y) = 1$ ist $(f, g, h) = 1$ und auch $(f, g) = 1$; letzteres auf Grund der mittleren Gleichung $f\,g = -h^2$, derzufolge wir setzen können

$$f = -r^2,\ g = s^2,\ h = r\,s \text{ mit } (r, s) = 1.$$

Damit erhalten wir die zweiparametrige Lösung

$$X = r^4 + 4\,r\,s^3,\ Y = -2\,r^3\,s + s^4,\ X^3 + 4\,Y^3 = (r^6 + 10\,r^3\,s^3 - 2\,s^6)^2.$$

X wird selbst von der fraglichen Form, muß ein m-faches Quadrat sein

$$X = r\,(r^3 + 4\,s^3) = m\,x_0^2 \qquad (r, s) = 1$$

und müßte daher wieder den Faktor r von derselben Form abspalten usw., ein unendlicher Regreß. Der Abstieg trifft den Absolutbetrag; da $r^3 + 4\,s^3 = \pm 1$ (nach *Legendre*) unlösbar ist, ist sicher $|X| > |r|$.

Wir haben jetzt noch den zweiten Ansatz

$$X + Y\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2} - 1)\,(f + g\sqrt[3]{2} + h\sqrt[3]{4})^2$$

zu untersuchen. Dieser ergibt

$$4fh + 2g^2 - f^2 - 4gh = X,\ f^2 + 4gh - 2fg - 2h^2 = 0,$$

$$2fg + 2h^2 - 2fh - g^2 = Y.$$

Nach der mittleren Gleichung ist entweder $f - 2h = 0$, $f^2 - 2h^2 = 0$, d. h. $f = h = 0$; dann $X = 2g^2$, $Y = -g^2$, was nicht in Betracht kommt ($m = 2$). Oder ansonsten $g = \dfrac{f^2 - 2h^2}{2f - 4h}$; dies in die Gleichung für X einsetzt, ergibt

$$(2f - 4h)^2 \,.\, X = -2f^4 + 24f^3h - 72f^2h^2 + 80fh^3 - 24h^4,$$

welches Polynom also mit X ein m-faches Quadrat sein müßte. Das kann es aber in unserm Falle (m ungerade) nicht, denn es enthält immer eine ungerade Potenz von 2. (Für das Doppelte solcher Primzahlen oder Primzahlprodukte ginge es, z. B. 14, 26.) Damit ist der Ansatz $\varphi = \varepsilon\,\alpha^2$ unmöglich und der Beweisgang, der auch vom Vorzeichen von m ganz unabhängig bleibt, vollendet.

7. Tabellen.

Anhangsweise gebe ich noch eine Tabelle von Fermat-Tripeln $(a + b\sqrt{m})^3 + (a - b\sqrt{m})^3 = c^3$, die nicht schon in *Fueters* Liste vorkommen.

$a + b\sqrt{m}$	c	$a + b\sqrt{m}$	c	$a + b\sqrt{m}$	c
$18 + 17\sqrt{2}$	42	$12 + 43\sqrt{15}$	126	$1 + 5\sqrt{-71}$	−22
$9 + \sqrt{5}$	12	$36 + 127\sqrt{17}$	390	$2 + \sqrt{82}$	10
$6 + 5\sqrt{6}$	18	$12 + \sqrt{33}$	18	$1 + \sqrt{85}$	8
$1 + \sqrt{-11}$	−4	$4 + \sqrt{-47}$	−10	$4 + \sqrt{109}$	14
$98 + 31\sqrt{-14}$	−182	$486 + 11\sqrt{58}$	630	$1 + \sqrt{-167}$	−10
		$16 + 5\sqrt{-62}$	−52		

Ferner noch einige Werte von m, wo eine Relation $X(X^3 + 4Y^3) = mZ^2$, bzw. $X(X^3 + 4Y^3) = -3mW^2$ die Lösbarkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in $K(\sqrt{m})$ anzeigt.

m	X	Y	Z	W
11	4	19	100	
14	14	179	4790	
26	26	1511	117470	
—26	78	—29		614
29	9	—1	15	
—38	114	367		14114
41	16	1	40	
43	4	3	4	
65	52	37	524	
—109	4	—5	4	

Notiz zu einem Satz über Diophantische Approximationen.

Von

L. Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 28. April 1952.)

Kanagasabapathy[1] hat eben mit Hilfe eines Satzes von *Davenport* (1946)[2] gezeigt: Es gibt ein reelles irrationales ϑ und ein reelles α, so daß die Ungleichung

$$|y\vartheta - x - \alpha| < \frac{h}{4|y|}$$

für irgendein $h, 0 < h < 1$ in ganzen (x, y) mit $y \neq 0$ unlösbar ist. Damit ist also gezeigt, daß $c = 1/4$ die „beste Konstante" ist, wenn man auch nur die Existenz mindestens einer ganzzahligen Lösung $(x, y), y \neq 0$ der Ungleichung $|y\vartheta - x - \alpha| < \frac{c}{|y|}$ für alle irrationalen ϑ und alle reellen α verlangt. Das ist das inhomogene Analogon zu einem Satze von *Prasad*[3]. Bekanntlich hat kürzlich *Hofreiter*[4] das Gegenstück zum Satz von *Prasad* für die ganzen Zahlen aus $k(i)$ bewiesen.

Es darf nun in diesem Zusammenhang vielleicht darauf hingewiesen werden, daß sowohl das Ergebnis von *Kanagasabapathy* als auch der entsprechende Satz für die ganzen Zahlen aus $k(i)$ leicht aus einer früheren Arbeit (1938) von *Hlawka*[5] folgen. Wir zeigen genauer, indem wir uns zur Vereinfachung der Schreibweise auf den Körper $k(i)$ beschränken, folgenden

Satz: Es gibt ein komplexes irrationales ϑ und ein komplexes β, so daß

---

[1] *Kanagasabapathy:* Proc. Cambridge Phil. Soc. **48**, 365—366 (1952).
[2] *Davenport:* Proc. Acad. Sci. Amst. **49**, 815—821 (1946).
[3] *Prasad: J.* Lond. Math. Soc. **23**, 169—171 (1948).
[4] *Hofreiter:* Mh. f. Math. **56**, 61—74 (1952).
[5] *Hlawka:* Mh. f. Math. u. Physik **47**, 181—196 (1938).

$$|y\vartheta - x - \beta| < \frac{|h|}{2|y|} \tag{1}$$

für jedes h mit $0 < |h| < 1$ in ganzen (x, y) mit $y \neq 0$ aus $k(i)$ unlösbar ist. Die Konstante $1/2$ ist die „beste" ihrer Art.

Beweis: Wir betrachten nach *Hlawka* die komplexe Irrationalzahl

$$\vartheta = i\frac{(b-1) - \sqrt{b^2+1}}{2b},$$

welche der Gleichung

$$2bz^2 - 2i(b-1)z + 1 = 0,\ b \text{ ganz} > 0. \tag{2}$$

genügt. Es sei nun (1) für ganze x, y und $y \neq 0$ aus $k(i)$ und irgendein h mit $0 < |h| < 1$ lösbar. Dann kann man mit passendem h $0 < |h| < 1$ schreiben:

$$y\vartheta - x - \frac{1+i}{2} = \frac{h}{2y}$$

oder

$$2y\vartheta - 2x - 1 - i = \frac{h}{y}. \tag{3}$$

Sei nun

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - 8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|} < |y| < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - 8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|} \tag{4}$$

Es ist $\frac{1}{2b} < |\vartheta| < \frac{1}{b}$. Weiter hat man für $b \geqq b(|h|)$ offenbar $b^4(1 - |h|^2) - b^2(8 + |h|^2) + 16 > 0$. Nun wähle man

$$b \geqq \max\left(b(|h|), \frac{|h|}{\sqrt{1-|h|^2}}\right). \tag{5}$$

Man beachte zunächst, daß für hinreichend großes b

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - 8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|} < 1.$$

Weiter gilt:

$$|2y\vartheta - 2x - 1 - i| \geqq ||2x + 1 + i| - |2y\vartheta|| \geqq$$
$$\geqq |\sqrt{2} - |2y\vartheta|| = \sqrt{2} - |2y\vartheta|,$$

da aus (4) $|y| < \frac{\sqrt{2}}{2|\vartheta|}$ folgt. Es ist aber $\sqrt{2} - |2y\vartheta| > \frac{|h|}{|y|}$, weil

das Polynom in $|y|\ 2|\vartheta||y|^2-\sqrt{2}|y|+|h|$ im Intervall (4) stets negativ ist. Nun sei

$$|y|^2 > \frac{|h|^2 b}{2(b-|h|\sqrt{b^2+1})}. \tag{6}$$

Wegen (5) ist der Nenner positiv. Nach *Hlawka*[5] gilt der Satz: Für alle ganzen x, y aus $k(i)$ mit $x \equiv (1+i) \bmod 2$ ist stets

$$|b x^2 - 2i(b-1)xy + 2y^2| \geqq 2b.$$

Aus (3) und (2) folgt aber

$$2[b\xi^2 - 2i(b-1)\xi y + 2y^2] + 2\left[2hi\sqrt{b^2+1} - \frac{bh^2}{y^2}\right] = 0,$$

mit $\xi = 2x+1+i$, also $\xi \equiv 1+i$ (2). Wegen (6) ist aber

$$2|h|\sqrt{b^2+1} + \frac{b|h|^2}{|y|^2} < 2b,$$

also nach dem zitierten Satz von *Hlawka* auch unter der Voraussetzung (6) ein Widerspruch hergeleitet. Damit ist aber alles gezeigt, wenn noch

$$\frac{|h|^2 b}{2(b-|h|\sqrt{b^2+1})} < \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|}\right)^2$$

nachgewiesen wird.

Dies ist aber äquivalent mit

$$(1-2|\vartheta||h|+\sqrt{1-4|\vartheta||h|})(b-|h|\sqrt{b^2+1}) > 2|\vartheta|^2|h|^2 b.$$

Wegen $|\vartheta| < \frac{1}{b}$ ist dies um so mehr der Fall, wenn

$$\left(1-\frac{2}{b}\right)(b-|h|\sqrt{b^2+1}) > \frac{2}{b}$$

ist.

Für hinreichend großes b ist $\left(1-\frac{2}{b}\right) > \frac{1}{2}$ also

$$b-|h|\sqrt{b^2+1} > \frac{4}{b}$$

zu erfüllen und dies ist wegen (5) stets der Fall.

Daraus und aus dem Satze von *Hlawka*[6] über die inhomogene Approximation durch Zahlen aus $k(i)$ ergibt sich auch die Tatsache, daß 1/2 die „beste" Konstante ist.

[6] *Hlawka:* Mh. f. Math. u. Physik **46**, 324—334 (1937).

Buchbesprechungen.

Elemente der Philosophie und der Mathematik. Von *A. Speiser.* 115 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1952. sfr. 11.45.

Dieses Werk, welches uns der Verfasser hier vorlegt, ist rein philosophischen Charakters sowohl dem Inhalt als auch der Form nach. Es stellt sich die Aufgabe, die Hegelsche Wissenschaftslehre in gereinigter Form in der Gestalt einer Bachschen Fuge aufgebaut, neu zu entwickeln. Die Wirkung der Hegelschen Dialektik reicht in den Geisteswissenschaften wie Geschichte und Soziologie bis auf die heutige Zeit. Die von Hegel gegebene Anwendung auf die Mathematik und die Naturwissenschaften war aber verfehlt. Es sei nur an die Hegelsche Definition der Wärme und Elektrizität erinnert. Die Hegelsche Philosophie wurde daher von den Mathematikern und Naturforschern mit Recht abgelehnt. Ob es der neuen Darstellung dieser Philosophie, welche uns der Verfasser hier gibt, gelingen wird, Mathematiker und Naturwissenschaftler zu einer Änderung ihrer Haltung zu bewegen, kann erst die Zukunft lehren. Jedenfalls ist die Hegelsche Wissenschaftslehre dem Verfasser eine Herzensangelegenheit, wie aus mehreren Stellen des Buches hervorgeht. (Besonders deutlich aus der persönlichen Bemerkung S. 73.) Dem Mathematiker werden die Ansichten des Verfassers über die Begriffe der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit (S. 66—68) auffallen.

Jeder wird das Buch, ob man den entwickelten Ansichten zustimmt oder nicht, mit großem Interesse lesen. Die Ausstattung des Buches ist sehr gut.

E. Hlawka, Wien.

Die Grundlagen der Arithmetik. Von *G. Frege.* Mit einer englischen Übersetzung von J. L. Austin. XII, 119 S. (2mal). Oxford: B. Blackwell. 1950. DM 15.—, 16 s. net.

Es ist ein verdienstvolles Unternehmen, die Grundlagen der Arithmetik neu aufzulegen und noch dazu in einer Form, die zugleich dem deutsch und englisch sprechenden Leserkreis dient, indem nämlich stets auf einer Seite der deutsche und auf der andern der übersetzte englische Text steht. Den Darlegungen von Frege kommt auch heute noch große Aktualität zu. Frege hat ja in vieler Hinsicht die Entwicklungen des modernen Logizismus antizipiert und hat genau genommen mit denselben Schwierigkeiten gekämpft, die auch heute — trotz des großartigen Aufschwunges der Grundlagenforschung — nur zum Teil überwunden sind. Jeder an den Grundlagenuntersuchungen Interessierte wird das Erscheinen der Grundlagen der Arithmetik in dieser Form lebhaft begrüßen.

L. Schmetterer, Wien.

On the Metamathematics of Algebra. Von *A. Robinson.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) IX, 195 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1951. fl. 18.—.

Man hat vielfach der mathematischen Logik und den Bemühungen der Grundlagenforscher den Vorwurf gemacht, daß die Anstrengungen für eine

strukturelle Kenntnis der mathematischen Begriffe und Beweise in gewissem Sinne isoliert geblieben sind und sich in Anwendungen auf innermathematische Fragen nicht als erfolgreich erwiesen hätten. Ganz abgesehen davon, daß dies auch bisher nicht zutreffend war (Topologie, Verbandstheorie), ist es besonders bemerkenswert, daß hier wieder ein Schritt vorwärts gemacht wird und die abstrakte Algebra, das Gebäude der Ringe, Körper usw. mit den metamathematischen Methoden behandelt wird. Unter den Ergebnissen in dieser Richtung sei erwähnt: Jeder Satz des eingeschränkten Prädikatenkalküls, welcher richtig ist für alle nicht-archimedisch geordneten Körper, ist auch richtig für alle geordneten Körper. Das Schwergewicht der Darstellung ruht jedoch auf der Betrachtung metamathematischer Axiomensysteme, die als Verallgemeinerung algebraischer Systeme aufgefaßt werden können. Es wird z. B. eine metamathematische Einführung des Begriffes Polynom gegeben und gezeigt, wie man damit Polynomringe aufbaut. Im folgenden dient die algebraische Erweiterung als Vorbild. Dies führt zum beschränkten und algebraischen Prädikat. Besonders interessant und wohl am weittragendsten ist die Übertragung des Idealbegriffes. Vorkenntnisse für das Verständnis sind kaum nötig, da im Anschluß an Hilbert das über den Prädikatenkalkül Nötige geboten wird. Ein folgendes Kapitel enthält diesbezügliche Vollständigkeitssätze (Gödel).

Es sei noch Folgendes gesagt: Bei der Lektüre wird wieder ein Umstand offensichtlich, der — wie mir scheint — eines der wesentlichen Hindernisse für die doch wohl gebotene Übernahme der Sprache der mathematischen Logik in die mathematischen Abhandlungen ist: die schwerfällige Symbolik. Zweifelsohne erscheinen die üblichen Schreibweisen für den Gebrauch in der mathematischen Logik durchaus adequat, aber man vgl. z. B. die sieben Zeilen lange Symbolisierung des Satzes: „Jedes Polynom n ten Grades hat eine Wurzel" auf S. 43, obwohl man sich nicht vorstellen kann, wie man es grundsätzlich anders machen sollte. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß vielversprechende Ergebnisse erzielt worden sind, die hoffentlich auch manchem Skeptiker die Bedeutung und Fruchtbarkeit metamathematischer Untersuchungen klar zeigen werden. Die Studien in Logic sind wieder um ein wertvolles Stück bereichert worden.

L. Schmetterer, Wien.

Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel. Von *A. Mostowski.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 117 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1952. fl. 12.—.

Ohne Zweifel kann man den Gödelschen Unableitbarkeitssatz, dessen Beweis zum ersten Mal in dieser Zeitschrift im Jahre 1931 veröffentlicht wurde, als das zentrale und bisher bedeutsamste Ergebnis der Grundlagenforschung ansehen. Der Satz von Gödel, daß jedes ω-widerspruchsfreie System, welches die rekursive Zahlentheorie umfaßt, nicht vollständig ist, ist später immer wieder Gegenstand von Neubeweisen und zusätzlichen Untersuchungen gewesen. Der Verf. der vorliegenden Monographie hat nun eine saubere oft eigenständige Darstellung der Unableitbarkeitstheoreme gegeben, welche — eine gewisse Höhe des abstrakten Denkens vorausgesetzt — auch ohne Vorkenntnisse lesbar sein mag. Zu Grunde liegt ein formales System, welches ein Kodifikat der Arithmetik ist und dessen Gödelsche Synthaxarithmetisierung zunächst durchgeführt wird. Im Anschluß an Tarski folgt die semantische Untersuchung des Systems. Wie der Verf. schon im Vorwort hervorhebt, enthält das folgende, fünfte Kapitel die Definition des allgemeinen Begriffes der $\mathfrak{R}$-Definierbarkeit,

bezüglich dessen auf das Buch verwiesen sei und welcher sowohl eine Verallgemeinerung der Quasirekursivität von Gödel-Church-Kleene als der Definierbarkeit von Tarski darstellt. Er bietet eine gemeinsame Grundlage für die im folgenden gebotenen Beweise des Gödelschen Theorems. Dem ersten Beweis liegen Ideen von Tarski zu Grunde, der zweite Beweis ist im wesentlichen der Originalbeweis von Gödel und der dritte Beweis ist zuerst von Rosser gegeben worden. Rosser hat ja bekanntlich gezeigt, daß man die ω-Widerspruchsfreiheit im Satz von Gödel durch die Widerspruchsfreiheit ersetzen kann.

Es schließt sich eine Reihe wichtiger Ergänzungen an. Insbesondere enthält ein Anhang die wichtige Folgerung aus dem Gödelschen Satz, daß sich der Widerspruchsfreiheitsbeweis eines Systems, welches seine Synthax in arithmetisierter Form enthält, nicht im System führen läßt. Man muß das Buch als sehr gelungen bezeichnen, wie man es von einem Autor, der der berühmten polnischen logischen Schule entstammt, nicht anders erwartet.

L. Schmetterer, Wien.

Rein arithmetischer Beweis des Siegelschen Endlichkeitssatzes für binäre diophantische Gleichungen im Spezialfall des Geschlechtes 1. Von *H. Hasse*. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften; Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Heft 2.) 19 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951. $ —.48.

Der Verfasser gibt einen von transzendenten Hilfsmitteln freien Beweis des berühmten Siegelschen Satzes: Jede irreduzible Gleichung $F(x, y) = 0$ (F Polynom mit Koeffizienten aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper K) des Geschlechtes $g \geqq 1$ hat nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen aus K. Der Verfasser behandelt den Fall $g = 1$, bemerkt aber, daß die bereitgestellten Hilfsmittel wohl auch im allgemeinen Fall zum rein arithmetischen Beweis ausreichen dürften.

K. Prachar, Wien.

Höhere Mathematik. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil I. Zehnte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 21.) Mit 161 Textabb., 211 S. DM 6.30. — Teil II. Achte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 22.) Mit 98 Textabb., 210 S. DM 5.60. — Teil III. Fünfte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 23.) Mit 167 Textabb., 236 S. DM 5.80. — Leipzig-Berlin: B. G. Teubner. 1952.

Die ausgezeichneten und beliebten Bücher sind schon wieder in neuer Auflage erschienen. Abgesehen von kleinen Verbesserungen ist im Band I ein neuer Abschnitt über „Integrationsgrenzen bei neuen Veränderlichen" und im Band II ein neuer Abschnitt über „Eindeutigkeitssatz für Fouriersche Reihen" aufgenommen worden. Die Bücher gehören zu den besten, die je zur Einführung in die höhere Mathematik geschrieben worden sind. Die letzte Besprechung in dieser Zeitschrift erfolgte in: Mh. Math. 55, 97—98 (1951). *N. Hofreiter*, Wien.

Fourier Transforms. Von *N. Sneddon*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) XII, 542 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1951.

Es ist nicht die Absicht des Autors gewesen, eine nur auf mathematische Bedürfnisse Rücksicht nehmende Darstellung wichtiger Funktionaltransformationen zu geben, sondern das Hauptgewicht ruht auf den Anwendungen

der Theorie auf die Randwertaufgaben der Physik. Die ersten drei Kapitel sind der Bereitstellung des mathematischen Rüstzeuges gewidmet und geben zunächst die Kennzeichnung der Fourierkerne (mit Inversionsformel) durch die Hardy-Titshmarshsche Beziehung ihrer Mellin-Transformierten, und behandeln dann insbesondere die Fourier-, Laplace-, Mellin- und Hankel-Transformationen, wobei auf mathematisch einwandfreie Beweise Gewicht gelegt wird, wenn auch nicht unter den schärfsten Voraussetzungen. Dem Charakter des Buches entsprechend wird auch die Dirac-Funktion behandelt. Die Anwendungen nehmen ihren Anfang bei den Schwingungsaufgaben. Es muß als ein Vorzug der Darstellung gewertet werden, daß stets die benötigten Ansatzgleichungen nicht einfach durch einen Hinweis auf ein einschlägiges Lehrbuch der Physik eingeführt werden, sondern die Grundgedanken ihrer Herleitung dem Text entnommen werden können. Es lag ja auch in des Verf. Absicht, dem Leser auch physikalische Kenntnisse zu vermitteln. Es folgt ein Abschnitt über Wärmeleitungsaufgaben. Interessant ist das nächste Kapitel über die Bremsung von Neutronen in Materie. Hier lernt der Leser anläßlich der Behandlung der Integralgleichung von Milne auch die Methode von Hopf-Wiener kennen. Nach einer Behandlung hydrodynamischer Probleme, wendet sich der Autor Aufgaben aus der Atom- und Kernphysik zu. Hier ergibt sich eine nicht leicht lösbare Aufgabe. Einerseits ist die Darstellung bemüht, nur solche Probleme zu betrachten, welche sich in den vorgeschriebenen Rahmen fügen und dem Leser nicht allzu viele Kenntnisse aus der Wellenmechanik zumuten, anderseits soll doch eine gewisse Abrundung dieses Kapitels erzielt werden. Eine besonders ausführliche und vielfach eigenständige Behandlung erfahren im letzten Abschnitt Probleme der Elastizitätstheorie. Anhangweise werden Eigenschaften der Besselfunktionen etwas genauer untersucht, Methoden für die annäherungsweise Berechnung von Integraltransformationen und Transformierte spezieller Funktionen gegeben. Die einheitliche Behandlung einer Fülle von klassischen und weniger bekannten Problemen ist als Vorzug des Buches zu werten. Auch kann man die Synthese zwischen den Anforderungen der mathematischen Strenge und den Wünschen der Anwendung als durchaus geglückt bezeichnen.

L. Schmetterer, Wien.

Linear Transformations in n-dimensional vector space. An Introduction to the Theory of Hilbert Space. Von *H. L. Hamburger* und *M. E. Grimshaw*. X, 195 S. Cambridge: At the University Press. 1951. Geb. 25 s. net.

Der Untertitel des Buches ist nicht so zu verstehen, daß außer der Theorie der linearen Transformationen im endlich-dimensionalen Raum auch eine Einführung in die Theorie für den Hilbertschen Raum gegeben wird, sondern die Autoren haben sich das Ziel gesetzt, die n-dimensionale Theorie so darzustellen, daß die Übertragung auf den unendlich dimensionalen Raum keine Schwierigkeiten mehr bietet. Insbesondere wird auf die Determinantentheorie verzichtet. Vorkenntnisse für die Lektüre sind kaum erforderlich, da alles Notwendige, insbesondere über den unitären Vektorraum in den beiden ersten Kapiteln dargestellt wird. Das dritte Kapitel ist der Spektraldarstellung der Hermiteschen und normalen Transformationen und der Untersuchung des Spektrums gewidmet. Hier findet sich auch die interessante erst kürzlich von Aronszayn anläßlich seiner Untersuchungen über die Methode von Weinstein gefundene Eigenwertabschätzung. Im Zentrum des vierten Kapitels steht die Jordansche Normalform. Die Methode ihrer Herleitung gestattet die Übertragung auf den Hilbertschen und allgemeinere Räume und geht auf eine erst unlängst erschienene

Arbeit von Hamburger zurück. Im fünften Kapitel werden Eigenwertprobleme für die Transformation $H - \lambda G$ besprochen, wobei H und G hermitisch sind und G positiv definit ist. Dies geschieht durch Betrachtung von Vektorräumen mit einer durch G aufgeprägten Maßbestimmung. Die Anwendung auf das Problem der Stabilität von Gleichgewichtslagen bewegter Systeme wird kurz dargestellt. Das Buch wird seinem Zweck vollauf gerecht.

L. Schmetterer, Wien.

Introduction to the Theory of Distributions. Von *I. Halperin*. (Canadian Mathematical Congress; Lecture Series: Nr. 1.) 35 S. Toronto: University of Toronto Press. 1952. $ 2.—.

Die wichtige Theorie der Distributionen ist ausführlich in zwei Bänden der Actualitès scientifiques et industrielles vom Schöpfer dieser Theorie, L. Schwartz, dargelegt worden. Allerdings setzt die Lektüre dort ein gewisses Maß mathematischer Vorkenntnisse voraus. Das vorliegende Heft wurde geschrieben, um auch den an innermathematischen Fragen nicht unmittelbar interessierten, wie z. B. den Physiker in diese Theorie einzuführen. Stellt sie doch, um nur eines anzuführen, die Operatorenrechnung auf eine neue Basis. Die sehr klare und im besten Sinne elementar gehaltene Darstellung gibt auch eine Einführung in die Theorie der Distributionen mehrerer Variablen und streift noch die Faltung und Fourierreihen von Distributionen. Das Büchlein wird seinem Zweck vollauf gerecht.

L. Schmetterer, Wien.

Facts from Figures. Von *M. J. Moroney*. Mit 107 Textabb., VIII, 472 S. Harmondsworth, Middlesex: Penguin Books. 1951. 5 s.

Es wird eine Einführung in die Methoden der Statistik gegeben, jedoch werden keinerlei mathematische Vorkenntnisse vorausgesetzt, die vier Grundrechnungsarten ausgenommen. Demgemäß wird sehr langsam vorgegangen. Die bildliche und graphische Darstellung statistischer Daten und viele Beispiele unterstützen dieses Beginnen wirksam. Dabei bleibt die stets elementare Darstellung nicht in den Anfängen stecken, bespricht z. B. die Stichprobenverfahren von Dodge und Romig, die Waldsche sequential analysis für alternative Grundgesamtheiten, den Begriff des Signifikanztestes, Vertrauensintervalle und eine Reihe von anderen Techniken, die für den Statistiker heute unentbehrlich sind. Wir weisen noch auf den Abschnitt über Zeitreihen und Rangkorrelation hin. Eine sehr ausführliche Einführung in die Varianzanalyse beschließt die Darstellung. Selbstverständlich ist der Autor an umfangreichen mathematischen Ableitungen oder besonders exakter Begriffsbildung weniger interessiert, aber man kann sich gut vorstellen, daß sich der Nichtmathematiker bei der Lektüre eine weitgehende Vertrautheit mit den Anwendungen der modernen Statistik aneignet.

L. Schmetterer, Wien.

Mathematische Maschinen und Instrumente. Von *Fr. A. Willers*. Mit 258 Textabb., XII, 318 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951.

In den letzten 10 Jahren wurde ein großer Fortschritt auf dem Gebiete der instrumentellen Mathematik erzielt. Es wurde nicht nur eine große Anzahl von neuen Apparaten für Flächenberechnung, für harmonische Analyse usw. erbaut. Unvergleichlich größer ist der Fortschritt im Bau von mathematischen Maschinen. Hier sind es vor allem die programmgesteuerten Rechenautomaten zur automatischen Durchführung längerer Rechnungen und Differentialanaly-

satoren für die genäherte Lösung von Differential- und Integralgleichungen. Damit lassen sich nunmehr Aufgaben durchführen, die früher nicht bewältigt werden konnten. Im Vergleich zum Buch „Mathematische Instrumente", das vom Verfasser 1943 erschien, ist das vorliegende bedeutend erweitert worden. Vieles ist ganz neu. Der Abschnitt über Rechenschieber (Kap. I) konnte ganz kurz sein, da es darüber genug gute Bücher gibt. Ausführlich werden Rechenmaschinen (Kap. II) behandelt. Sie sind ob ihrer vielseitigen Verwendbarkeit für die praktische Analysis sehr wichtig und ob ihrer Verbreitung wurde das logarithmische Rechnen zurückgedrängt. Das Buch bringt einen Überblick über die wichtigen Addiermaschinen, ihren Aufbau und ihre Arbeitsprinzipe. Insbesondere wird auf die vollautomatisch arbeitenden Maschinen eingegangen, die die Rechnung nach Einstellung der Zahlen ohne weiteren Eingriff des Rechners durchführen. Kap. III handelt von Rechenautomaten, also jenen komplizierten Maschinen, die nicht nur einzelne Rechenoperationen durchführen, sondern auch die in einer Maschine gewonnenen Resultate in die die nächste Operation ausführende Maschine automatisch übertragen. Es sind somit Maschinen, die eine längere Kette von Rechenoperationen nach einem Rechenplan ohne Eingriff des Rechners vollautomatisch abwickeln. Man nennt sie programmgesteuerte Rechenautomaten. Sie enthalten ein Kommandogerät, von dem der Ablauf der Rechnung gesteuert wird, ferner komplizierte Rechenvorrichtungen, Eingabe- und Auslieferungsvorrichtungen und eine umfangreiche Speicheranlage. Diese Maschinen arbeiten meist elektrisch. Um eine Rechnung auf einem Rechenautomaten durchführen zu können, muß man natürlich die Rechnung zunächst in eine Folge von Grundoperationen zerlegen. Die Entwicklung der Rechenautomaten ist bereits weit fortgeschritten und schreitet weiter rasch fort. Kap. IV handelt von Kurven und Messungen an Kurven. Es werden Instrumente besprochen, die zum Auftragen von Kurven dienen und mit denen man Messungen an Kurven ausführen kann. Kap. V bringt Planimeter, insb. Polarplanimeter, die nächst den Rechenschiebern und Rechenmaschinen die am meisten gebrauchten mathematischen Instrumente sind. Kap. VI handelt von harmonischen Analysatoren und Stieltjes-Planimetern, Kap. VII von Integraphen und Integratoren, während Kap. VIII Differentialgleichungsmaschinen beschreibt, von denen die elektronischen die kompliziertesten sind. Das Literaturverzeichnis enthält 871 wissenschaftliche Arbeiten; es sind jene, die der Verf. selbst durchgearbeitet hat. Das Buch ist für den angewandten Mathematiker von außerordentlichem Wert. *N. Hofreiter*, Wien.

Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven. Von *L. Locher-Ernst.* (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus: Band 1.) Mit 168 Abb., 88 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1952. sfr. 12.50.

Der rührige Verlag eröffnet mit diesem Heft eine neue Serie mathematischer Monographien, die elementare Themen von höherer Warte aus behandeln sollen, doch so, daß vom Leser keine besonderen Vorkenntnisse verlangt werden. Das Gebiet, das hier behandelt ist, erscheint für diese Aufgabe besonders wohl geeignet, da es den Vorzug besitzt, anschaulich zu sein und zu seiner strengen Behandlung nur einer geeigneten Axiomatik der projektiven Geometrie zu bedürfen. Mit einer solchen beginnt der Verfasser, um dann die „freie", d. h. ohne Verwendung von Koordinaten aufgebaute Theorie der ebenen Kurven in der Richtung zu entwickeln, die in der Literatur vor allem durch die Arbeiten von *C. Juel* vertreten ist. Er versteht unter einem „Elementarbogen" eine stetige Kurve, die in allen Punkten eine bestimmte Tangente und höchstens

endlich viele Wendepunkte und Spitze aufweist, wobei aber in der Definition bereits die Selbstdualität sowie die projektive Invarianz zum Ausdruck kommt. „Elementarkurve" bedeutet einen geschlossenen Elementarbogen. Elementarbogen können noch unendlich viele Singularitäten (Doppelpunkte und Doppeltangenten) aufweisen. Dann wird der „einfache Bogen" definiert, worunter ein Teilbogen einer glatten Eilinie bzw. sein projektives Äquivalent zu verstehen ist. Die einfachen Bogen haben die Eigenschaft, auf jeder Geraden höchstens zwei Punkte und durch jeden Punkt höchstens zwei Tangenten zu besitzen, teilen diese Eigenschaft aber mit noch anderen Elementarbogen, die der Verf. als „C-Bogen" bezeichnet, nämlich mit konvexen Bogen, deren eine Endtangente durch den zweiten Endpunkt geht. Elementare Bogen ohne Singularitäten werden als „Spiralbogen" bezeichnet. Über sie werden eine Reihe interessanter Aussagen bewiesen, u. a. ein von *A. Kneser* vor etwa 60 Jahren gefundener Satz, der besagt, daß die Zahl der Tangenten aus einem Endpunkt gleich der Zahl der Schnittpunkte mit der anderen Endtangente ist. Jede Elementarkurve läßt sich in eine endliche Anzahl einfacher Bogen zerlegen; damit ist es möglich, für Elementarkurven Ordnung und Klasse zu definieren. Es werden dann die Elementarkurven dritter Ordnung genau diskutiert und die möglichen gestaltlichen Typen charakterisiert. Betrachtungen über die Auflösung von Doppelpunkten und Doppeltangenten, Beispiele von Elementarkurven vierter Ordnung Hinweise auf noch offene Fragen und eine Reihe sorgfältig ausgewählter Aufgaben beschließen das inhaltreiche und anregende Heft. *J. Radon*, Wien.

Leçons de géométrie projective. Von *L. Godeaux* und *O. Rozet*. Mit 73 Abb., 278 S. Liège: Science et Lettres. 1952. bfr. 400.—.

Dies ist ein Lehrbuch der projektiven Geometrie, welches aus Vorlesungen an der Universität Liège entstanden ist. Zur Grundlegung werden die Postulate von Enriques verwendet. (Im Vorwort findet sich übrigens eine hübsche historische Einleitung.) Die Einführung der projektiven Punktreihen wird nach dem Vorgange von *v. Staudt* durchgeführt. Die Kegelschnitte werden durch das Polarsystem definiert; die räumlichen Gebilde durch ihre projektive Erzeugung. Besonders hervorzuheben ist die gründliche Behandlung der räumlichen Projektivitäten und der Korrelationen. Im letzten Kapitel ist eine große Anzahl wertvoller Übungen zusammengestellt und ausführlich erläutert, die den Studierenden mit der Praxis der projektiven Konstruktionen vertraut machen. Die analytische Behandlung der geometrischen Gebilde tritt gemäß der Anlage des Buches etwas zurück.

Es ist Geometrie im guten Sinne des Wortes, die hier dargeboten wird, ohne Weitschweifigkeiten und in sehr klarer Ausdrucksweise. Man wird aus diesem Buch ein schönes Stück Geometrie lernen können. *K. Prachar*, Wien.

Übungen zur projektiven Geometrie. Von *H. Herrmann*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band 18.) Mit 90 Textabb. und 4 Raumbildern, 172 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1952. sfr. 14.—, geb. sfr. 17.—.

Das Buch stellt eine wertvolle Ergänzung zur projektiven Geometrie von *W. Blaschke* dar, aus dem auch viele Ausdrucksweisen und Bezeichnungen entnommen sind. Es ist eine alte Tatsache, daß zum wirklich gründlichen Verstehen einer Sache neben der Theorie auch das Durchdenken und Rechnen von Aufgaben gehört. Das Buch enthält eine sehr große Anzahl von Aufgaben und Lösungen in vorwiegend analytischer Behandlung. Als Lösungsmethoden

werden vornehmlich jene bevorzugt, die verallgemeinerungsfähig sind. Es ist erstaunlich, wie inhaltsreich das Buch ist. Es enthält eine Fülle von Figuren und Zusammenhänge zwischen ihnen, was nur dadurch möglich war, daß der Autor die projektive Geometrie von hoher Warte aus betrachtete und dadurch Vereinfachungen und Verallgemeinerungen erzielen konnte. In organischer Weise sind Geometrie und lineare Algebra verflechtet; besonders reichlich werden Matrizen benutzt. Den meisten Abschnitten sind kurze Übersichten vorangestellt, für deren Bearbeitung die dann folgenden Übungen als Wegweiser dienen. Die zahlreichen Figuren sind schön gezeichnet. Besonders intuitiv sind die schönen zweifarbigen Raumbilder. Das Buch ist zum Gebrauch neben Vorlesungen oder anderen Lehrbüchern gedacht. Es leitet den Leser vom Üben zum freien geometrischen Schaffen an und wird sicher viele Freunde erwerben.

N. Hofreiter, Wien.

Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze). Von *L. Balser*. Zweite Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 81.) Mit 50 Abb., 64 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.72.

In der vorliegenden 2. Auflage sind die ersten drei Kapitel (Einleitung, flächentreue Entwürfe, Kegelentwürfe) im wesentlichen unverändert geblieben. Ausführlicher werden hingegen im 4. Kapitel die winkeltreuen Entwürfe behandelt (stereographische Projektion, Mercators Seekarte). Das 5. Kapitel hat verschiedene Erweiterungen erfahren, so wurden z. B. die Entwürfe von *Aitoff*, *Hammer* und *O. Winkel* neu aufgenommen, wodurch moderne Arbeiten auf diesem Fachgebiet berücksichtigt werden konnten. Den Abschluß bildet eine Zusammenstellung der in diesem Bändchen behandelten Entwürfe. Das angeschlossene Literaturverzeichnis gibt die wichtigste einschlägige deutsche Literatur von 1894—1949 an. Ein ausführliches Namen- und Sachregister erleichtert das Nachschlagen in diesem Büchlein, das in seiner neuen, modernen Fassung wärmstens begrüßt werden wird.

J. Laub, Wien.

Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Von *G. Ludwig*. („Die Wissenschaft": Band 105.) 96 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1951. DM 10.80.

Die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein deutet das Gravitationsfeld als geometrische Struktur des Weltkontinuums. Die projektive Relativitätstheorie ist aus dem Bestreben entstanden, auch die Gesetze des Elektromagnetismus' aus einer geometrischen Struktur des Weltkontinuums zu folgern. Der Gedanke, ein fünfdimensionales Kontinuum zur Geometrisierung von Gravitation und Elektromagnetismus zu verwenden, stammt von *Th. Kaluza*. Durch eine Modifikation seiner Theorie konnte *O. Klein* die Gleichungen der Gravitation und des Elektromagnetismus in genauer Form erhalten. Die Schwierigkeit der physikalischen Deutung der fünften Koordinate wurde durch den Gedanken von *O. Veblen* beseitigt, der die Theorie als vierdimensionale projektive Theorie deuten konnte. Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, eine geschlossene Darstellung der Theorie zu geben und vor allem die seither gemachten Fortschritte bis zum derzeitigen Stand der Wissenschaft darzustellen. Hier sind es zunächst die Arbeiten von *W. Pauli*, von dem u. a. die Dirac'schen Gleichungen und die Feldtheorie der Mesonen eingeordnet wurden. Ein ganz neuer und kühner Gedanke wurde von *P. Jordan* in die Theorie eingeführt, indem er eine geometrische Invariante, deren physikalische Bedeutung auf die Gravitationskonstante führt, als variabel annimmt und also eine variable Gravitations-

konstante zuläßt. Dies ist für die Kosmologie von Bedeutung. Das Buch zerfällt in einen mathematischen und einen physikalischen Teil. In dem letzteren werden die Feldgleichungen für kosmologische Modelle gelöst, wobei insbesondere ein von dem Verfasser stammender Ansatz verwendet wird, der von dem Ansatz von *P. Jordan* abweicht. Die letzten Paragraphen sind einer Einordnung der Gesetze für Elektronen-Nukleonen und Mesonenfelder gewidmet.

Das Buch ist in knapper aber klarer Sprache abgefaßt. Leider ist es im Rahmen dieser Besprechung nicht möglich, auf Einzelheiten des sehr umfangreichen mathematischen Apparates einzugehen. Es ist zu hoffen, daß dieses wertvolle und tiefgründige Werk dazu beitragen wird, in weiteren Kreisen für diesen interessanten Teil theoretisch-physikalischer Forschung Interesse zu erwecken.

K. Prachar, Wien.

Classical Mechanics. Von *D. E. Rutherford*. Mit 29 Textabb., VIII, 200 S. Edinburgh und London: Oliver and Boyd. — New York: Interscience Publishers Inc. 1951. Geb. 10 s. 6 d. net.

Das in der Sammlung „University Mathematical Texts" erschienene kleine Buch gibt eine kurz gefaßte, doch zur Einführung ausreichende Darstellung der Mechanik der Massenpunkte und starren Körper. Auf die Beziehungen zu anderen Teilen der Physik wird mehrfach verwiesen, so werden auch die Kräfte des elektromagnetischen Feldes in die Betrachtung einbezogen und bei der Behandlung des harmonischen Oszillators findet sich die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ortes bei gegebener Periode und Amplitude als elementare Vorstufe analoger Probleme der Quantentheorie. Auch in den zahlreichen Aufgaben, die jeweils am Ende der Kapitel zu finden sind, kommen die Nachbargebiete zu ihrem Recht. Hervorzuheben ist die Sorgfalt, mit der der Verfasser um eine klare und logisch einwandfreie Formulierung der Grundbegriffe bemüht ist. Das hübsche Buch kann unseren Studierenden der mittleren Semester warm empfohlen werden.

J. Radon, Wien.

Mechanik der Festkörper. Von *E. Lohr*. Mit 73 Abb., VIII, 483 S. Berlin: W. de Gruyter. 1952. DM 39.60.

Das Buch ist der erste und — infolge des Todes des Verfassers — einzige Teil eines Lehrbuches der Physik. Das Buch zerfällt in zwei Teile: Mechanik der starren und der deformierbaren Körper. Gleich im ersten Kapitel findet sich (nach einer etwas philosophisch gehaltenen Einleitung) eine wohldurchdachte Behandlung der Raum- und Zeitmessung. Die Prinzipien solcher Messungen gehören sicherlich auch in ein theoretisches Lehrbuch. Es ist das Ziel des Verfassers gewesen, auch technische Anwendungen als Erläuterungen zur Theorie in einem größeren Ausmaß zu bringen als dies vielleicht sonst üblich ist. Der wahre Naturforscher soll ja Theorie und technische Anwendungen gleichermaßen beherrschen. Wir greifen aus der Fülle des Stoffes nur einige Dinge heraus, die diesem Standpunkt Rechnung tragen: Die Behandlung zahlreicher Mechanismen mit Reibung, die anschauliche Behandlung der Kreiselbewegung, Biegung von Platten, viele Beispiele elastischer Schwingungen, die Plastizitätstheorie u. a. m. Neben dem Haupttext sind noch zahlreiche Anmerkungen, die oft auf schwierigere Dinge hinweisen, z. B. ein Exkurs über die *Jacobi*'schen elliptischen Funktionen anläßlich der Behandlung des Pendels.

Die Darstellung ist überall einfach und setzt fast nichts voraus. Es liegt hier ein schönes Buch vor, das den Bedürfnissen des Theoretikers und Praktikers in gleicher Weise gerecht wird.

K. Prachar, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, R. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden

Zuletzt erschienen:

Band IV: **Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.** Von Dr. *Erwin Madelung*, o. Prof. der theoretischen Physik a. d. Universität Frankfurt am Main. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 29 Abbildungen. XX, 531 Seiten. 1950. DM 47.—; Ganzleinen DM 49.70

Band XXVII: **Grundzüge der theoretischen Logik.** Von *D. Hilbert* † und *W. Ackermann*, Lüdenscheid. Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 155 Seiten. 1949. DM 16.50; Ganzleinen DM 19.80

Band XXXIII: **Moderne Algebra.** Von Dr. *B. L. van der Waerden*, Professor der Mathematik an der Universität Amsterdam. Unter Benutzung von Vorlesungen von *E. Artin* und *E. Noether*. Erster Teil. Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 292 Seiten. 1950. DM 24.—; Ganzleinen DM 27.—

Band LII: **Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik.** Von Doktor *Wilhelm Magnus*, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und Dr. *Fritz Oberhettinger*, Dozent für Mathematik an der Universität Mainz. Zweite Auflage. VIII, 230 Seiten. 1948. DM 24.60

Band LV: **Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik.** Von Dr. *Fritz Oberhettinger*, Dozent für Mathematik an der Universität Mainz, und Dr. *Wilhelm Magnus*, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit 54 Abbildungen. VII, 126 Seiten. 1949. DM 15.60; Ganzleinen DM 18.30

Band LVI: **Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.** Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Von *Otto Toeplitz*. Erster Band. Aus dem Nachlaß herausgegeben von Dr. *Gottfried Köthe*, Professor der Mathematik an der Universität Mainz. Mit 148 Abbildungen. IX, 181 Seiten. 1949. DM 19.60; Ganzleinen DM 22.60

Band LVII: **Theoretische Mechanik.** Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Von Dr. phil. *Georg Hamel*, o. Professor an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg, o. Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften. Mit 161 Abbildungen. XVI, 796 Seiten. 1949. DM 63.—; Ganzleinen DM 66.—

Band LVIII: **Einführung in die Differentialgeometrie.** Von Dr. *Wilhelm Blaschke*, o. Professor an der Universität Hamburg. Mit 57 Abbildungen. VII, 146 Seiten. 1950. DM 16.—; Ganzleinen DM 18.60

Band LIX: **Vorlesungen über Zahlentheorie.** Von *Helmut Hasse*, o. Professor an der Humboldt-Universität Berlin. Mit 28 Abbildungen. XII, 474 Seiten. 1950. DM 42.—; Ganzleinen DM 45.—

Band LX: **Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.** Von Dr. *Lothar Collatz*, o. Professor an der Technischen Hochschule in Hannover. Mit 110 Abbildungen und einem Portrait. XIII, 458 Seiten. 1951. DM 45.—; Ganzleinen DM 48.—

Band LXI: **Fastperiodische Funktionen.** Von *Wilhelm Maak*, Professor an der Universität Hamburg. VIII, 240 Seiten. 1950. DM 21.60; Ganzleinen DM 24.60

Band LXII: **Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen.** Von Dr. *Robert Sauer*, o. Professor für Mathematik und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule München. Mit 63 Abbildungen. XIV, 229 Seiten. 1952. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Band LXIII: **Quadratische Formen und orthogonale Gruppen.** Von Dr. sc. nat. *Martin Eichler*, Professor an der Universität Münster in Westf. XII, 220 Seiten. 1952. DM 24.60; Ganzleinen DM 27.60

Zu beziehen durch

MINERVA, WISSENSCHAFTLICHE BUCHHANDLUNG GES. M. B. H., WIEN I

Verkaufslokal: Schottenbastei 2
Tel. U 27-0-47

Expedition: Mölkerbastei 5
Tel. U 26-5-60